



MINISTERIO DEL AIRE
DIRECCION GENERAL DE PROTECCION DE VUELO

SERVICIO METEOROLOGICO NACIONAL

PUBLICACIONES
Serie A (Memorias), núm. 16

APLICACIONES TEORICAS Y AERO- LOGICAS DE LOS DIAGRAMAS TERMODINAMICOS. EL DIAGRAMA POLITROPICO

POR

FRANCISCO MORAN SAMANIEGO

Doctor en Ciencias Físicas, Meteorólogo
asimilado a Comandante del Ejército del Aire

SECCION DE AEROLOGIA
Apartado 285, — MADRID
1 9 4 3

AEMET-BIBLIOTECA



1008175
© Agencia Estatal de Meteorología. 2018

Re 2.114

Sig M 11.33 E.



MINISTERIO DEL AIRE
DIRECCION GENERAL DE PROTECCION DE VUELO

SERVICIO METEOROLOGICO NACIONAL

PUBLICACIONES
Serie **A** (Memorias), núm. **16**

APLICACIONES TEORICAS Y AERO- LOGICAS DE LOS DIAGRAMAS TERMODINAMICOS. EL DIAGRAMA POLITROPICO

POR

FRANCISCO MORAN SAMANIEGO

Doctor en Ciencias Físicas, Meteorólogo
asimilado a Comandante del Ejército del Aire

SECCION DE AEROLOGIA
Apartado 285, — MADRID
1 9 4 3





LA COMISIÓN
DE ASESORIA DE LA AERONAUTICA

INFORME DE LA COMISIÓN DE ASESORIA DE LA AERONAUTICA

PRESENTE
A LA COMISIÓN DE ASESORIA DE LA AERONAUTICA

CON LA PRESENTE SE PRESENTA

EL INFORME DE LA COMISIÓN DE ASESORIA DE LA AERONAUTICA

DE LA AERONAUTICA

APLICACIONES TEORICAS Y AERO- LOGICAS DE LOS DIAGRAMAS TERMODINAMICOS. EL DIAGRAMA POLITROPICO

POR

FRANCISCO MORAN SAMANIEGO

Doctor en Ciencias Físicas, Meteorólogo
asimilado a Comandante del Ejército del Aire

*A mi ilustre amigo el profesor
Baltá, en prueba de gratitud a su
dirección y ayuda.*

1.—INTRODUCCION

En este trabajo damos a conocer diversas aplicaciones de los diagramas termodinámicos a la rápida demostración, y aún al descubrimiento, de proposiciones puramente teóricas, tanto termodinámicas como hidrodinámicas.

Presentamos también en él un nuevo diagrama que creemos de utilidad para los cálculos aerológicos. En la obligada comparación de nuestro diagrama con los que corrientemente se aplican en Meteorología, hemos procurado dar la mayor sencillez y rigor posible al análisis de las condiciones ideales de los diagramas termodinámicos en general y particularmente de los destinados a aplicaciones meteorológicas. Por último, este examen metódico nos ha dado ocasión de corregir algunos errores o descuidos de las demostraciones clásicas y de proponer algunas innovaciones en los procedimientos de utilización de los diagramas aerológicos.

2.—LOS EMAGRAMAS. APLICACIONES TERMODINAMICAS

Llamamos emagramas ^{*}(1), de e/ma, energía por unidad de masa, al diagrama p, v (ordenada p , abscisa v), y a todos los que resultan de él por una transformación de jacobiano igual a la unidad o constante. El más inmediato e importante de ellos es el diagrama T, S , pues en él las áreas encerradas por las curvas que representan ciclos reversibles, por significar trabajo contra el medio, al mismo tiempo que calor absorbido, son iguales a las encerradas por las curvas correspondientes del p, v .

En esta equivalencia de las áreas en ambos diagramas están contenidos el primer principio (equivalencia del calor al trabajo en todo ciclo) y el segundo (elección como variable de estado de una función S tal que en toda transformación reversible $\int TdS = \text{calor}$, o sea tal que $dS = \frac{\delta Q}{T}$). Todas las *ecuaciones* que resultan de la combinación de ambos principios pueden, pues, obtenerse formulando la equivalencia de áreas de ciclos convenientemente elegidos (2). En lo que sigue se verá que ese procedi-

(1) En Meteorología sólo se da este nombre al diagrama $\ln p, T$. Nosotros nos permitimos extenderlo a cuantos conservan áreas con el p, v .

(2) Para obtener inecuaciones es indispensable la inecuación fundamental, no introducida, $dS > \frac{\delta Q}{T}$ de los fenómenos irreversibles.

miento de obtención no sólo es posible, sino que resulta muy fácil; acaso el más fácil de todos, en especial desde un punto de vista didáctico:

A) **Fórmulas de Maxwell.**—Escogemos como ciclo un solenoide unidad del campo v , T ; es decir, el ciclo cerrado por las isothermas T y $T + 1$ y las isosteras v y $v + 1$. Como en uno y otro sistema coordinado una de las dimensiones del ciclo vale 1, su área será igual a la dimensión distinta de 1;

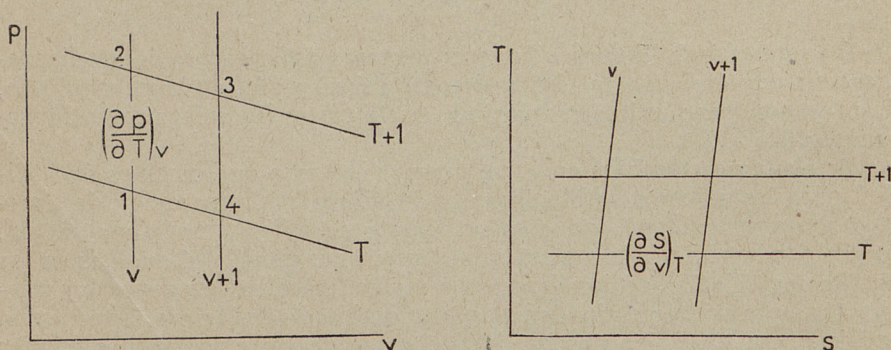


Fig. 1.

luego $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T$ (1) de donde $\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_T = T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ (1)'

Análogamente el solenoide unidad del campo p , T nos da:

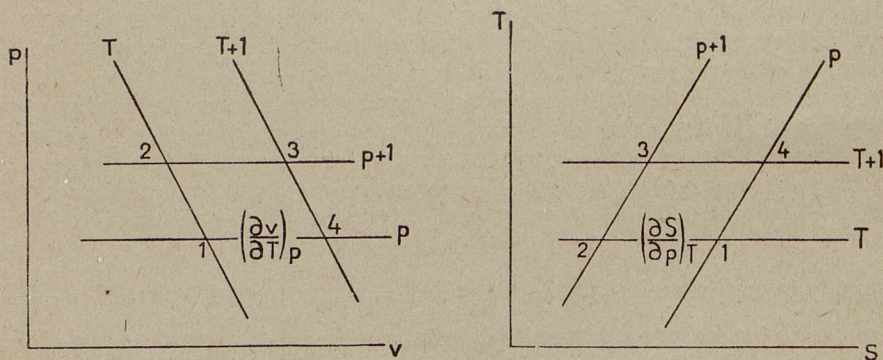


Fig. 2.

$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$ (2), o sea $\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_T = -T \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ (2)'

(El signo — ha resultado de la disposición de las isobaras en el diagrama T , S , impuesta por la necesidad de que la sucesión de puntos

1, 2, 3, 4 marque el mismo sentido de recorrido en ambos diagramas. Si invertimos en el p, v la numeración de las isotermas—coeficiente de dilatación negativo—también habrá que invertir la de las isobaras en T, S —descenso de T al comprimir adiabáticamente—. Las anomalías del caucho, agua, etc., resultan así demostradas antes de llegar a la fórmula).

Del mismo modo, el solenoide unidad del campo p, S nos da la fórmula

$$\left(\frac{\partial v}{\partial S} \right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S \quad (3)$$

y el solenoide unidad de v, S la fórmula:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_v = - \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_S \quad (4)$$

Las cuatro fórmulas de Maxwell, correspondientes a las cuatro parejas mixtas que se pueden formar con las coordenadas de los diagramas p, v y T, S , han resultado por un método uniforme, sencillo y casi imposible de olvidar, con el cual no son comparables, a nuestro entender, los métodos gráficos clásicos, a base de construcciones artificiosas y de triángulos semejantes ^{*} (3).

B) **Relaciones entre los calores específicos.**—En la figura 3 se advierte que la célebre ecuación (5) se limita a expresar la igualdad de las áreas del triángulo elemental 0, 1, 2.

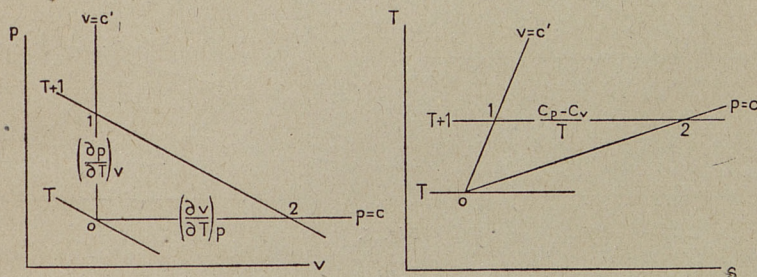


Fig. 3.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_p - C_v}{T}$$

(3) El artificio de igualar a la unidad dT y dv ; dT y dp , etc., en los solenoides, realmente infinitesimales, considerados aquí, nos ahorra de escribir los productos $dT \cdot dv$, $dT \cdot dp$, etc., que después habrían de suprimirse en ambos miembros. Al obtener gráficamente las consecuencias del primer principio no cabe esa supresión,

$$c_p = c_v + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_v \quad (5)$$

Con no menos facilidad resulta la conocida generalización (6) que puede ponerse en la forma (7)

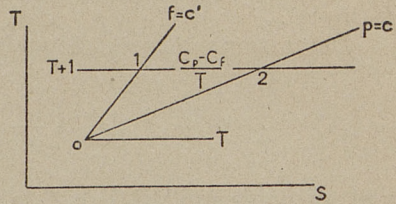
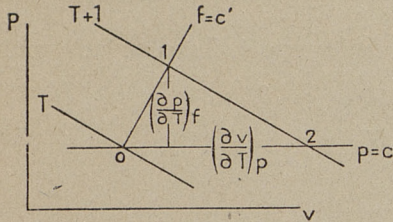


Fig. 4.

$$c_f = c_p - T \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_f \quad (6)$$

$$\delta Q = c_p dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \cdot dp \quad (7)$$

Más general aún es la fórmula (8) que resulta (fig. 5) de un triángulo sin particularidades de situación.

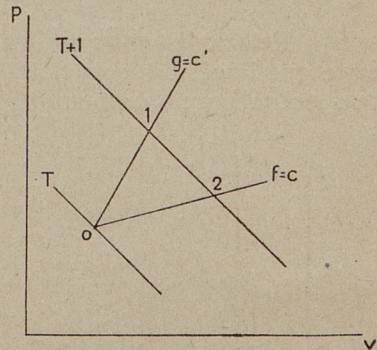
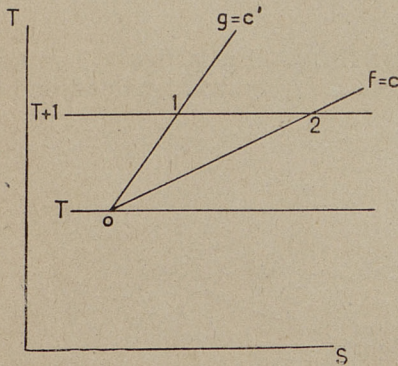


Fig. 5.

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial T} \end{pmatrix}_f \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial T} \end{pmatrix}_g \right| = \frac{c_f - c_g}{T}$$

porque se emplea *un solo diagrama*, el p, v . Entonces no se puede, pues, olvidar que el área encerrada por el ciclo es un infinitésimo de segundo orden.

Ejemplo: Igualando el área del triángulo 0-1-2 (fig. 3) al calor absorbido al describir su contorno, se tiene:

$$0 = c_p - c_v - \left(\frac{\partial Q}{\partial v} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \text{ o bien } 0 = c_p - c_v + \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

$$c_f = c_g + T \left[\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_f \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_g - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_g \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_f \right] \quad (8)$$

Fórmula que no hemos visto en parte ninguna, y que no nos parece inútil, ya que comprende como casos particulares a las anteriores, así como también a las:

$$c_f = c_v + T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_f \quad (9) \quad \text{y} \quad \delta Q = c_v dT + T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dv \quad (9)$$

que resultan de poner $g \equiv v$.

C) **Cambios de agregación.**—La ecuación de Clapeyron (fig. 6) expresa la igualdad de las áreas encerradas por las isobaras isotermas T y $T + 1$ y las dos líneas de equilibrio 1 y 2.

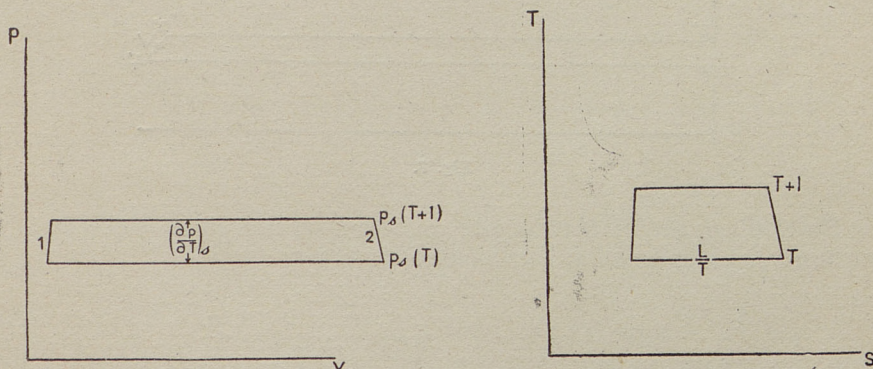


Fig. 6.

$$(v_2 - v_1) \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_s = \frac{L}{T} \quad (10)$$

La fórmula (11) de Clausius:

$$\frac{dL}{dT} + c_1 - c_2 = \frac{L}{T} \quad (11)$$

significa que la misma área es igual al calor comunicado en el ciclo limitante. (Por medio de la (6), se transforma la (11) en la fórmula exacta de Planck que da dL/dT en función de los c_p).

D) **Casos de más de un punto indicador. Efecto de la presión p sobre un líquido en la tensión saturante E del vapor.**—La unidad de masa des-

cribe el siguiente ciclo reversible *isotermo*: 1.° (1-2), aumento en dp de la presión del líquido puro; 2.° evaporación de todo el líquido, mantenido a la presión constante $p + dp$, mientras el vapor se produce a la tensión de equilibrio $E + dE$: (hay, pues, dos puntos indicadores: mientras 2 pasa a 3, 2' pasa a 3'). 3.° Expansión del vapor hasta la tensión E (3'—4'). Y 4.° (también dos puntos indicadores) liquidación del vapor a la tensión E , manteniendo también constante, e igual a p , la presión sobre el líquido (4'—1'), (4—1).

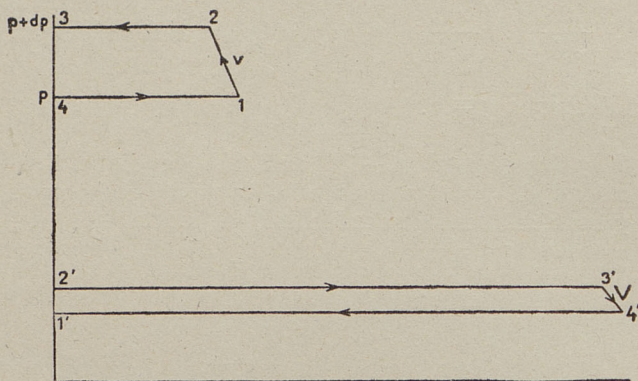


Fig. 7.

En el diagrama T, S todo este ciclo está en una línea (isoterma), y, por tanto, su área es nula. También lo será el área en el p, v ; luego

$$VdE - vdp = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dE}{dp} = \frac{v}{V} \quad (12)$$

Esta fórmula, fundamental en Meteorología por ser la clave del influjo de las acciones capilares y de las tensiones osmóticas sobre la condensación, suele faltar de los tratados. Sackur, en su *L. der Thermochemie und Thermodynamik*, deduce, estudiando analíticamente el mismo ciclo, una fórmula particular, válida sólo para vapores gases perfectos y para líquidos incompresibles; eso que su razonamiento es más prolijo que el que nos ha llevado a nosotros a un resultado completamente general.

E) Aplicación a un fenómeno irreversible. Efecto Joule-Thomson. Hay también en este caso dos puntos indicadores en el diagrama p, v ; pues mientras el gas se contrae a la presión $p + dp$ (1 a 2) se está expandiendo a la presión p (1' a 2'). Cerremos el ciclo por el trazo *reversible* 2'—1.

Como no hay velocidad final, el trabajo (área $-vdp$) es igual al calor. Este se reduce al absorbido en el único trayecto no adiabático 2'—1, que, según la fórmula (7), es:

$$-v dp = \delta Q = c_p dT - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp$$

$$\text{Luego: } \frac{dT}{dp} = \frac{T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v}{c_p} \quad (13)$$

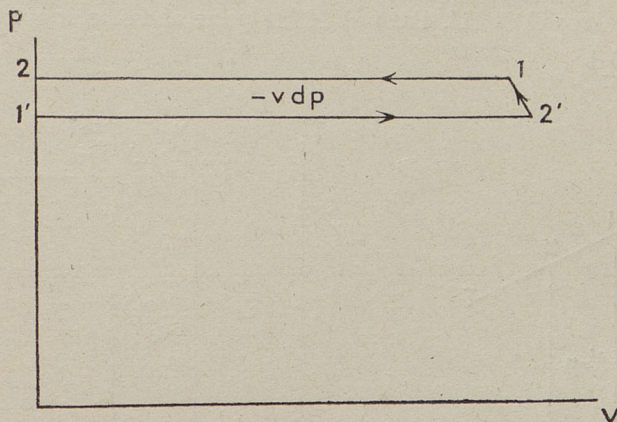


Fig. 8.

F) **Relaciones entre U y la ecuación de estado.**—1.º *Cuerpos que cumplen la ley de Joule:* para ellos (fig. 9) las áreas $A_i B_i C D = p_i$ representan calor, luego: $p_i = T_i \cdot A_i' B_i'$.

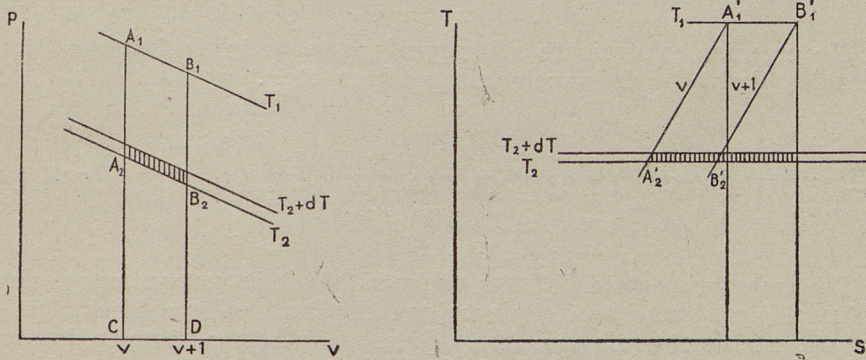


Fig. 9.

Más por ser ambas áreas rayadas de la derecha iguales a la rayada de la izquierda, son iguales todos los $A_i' B_i'$. Es decir, $A_i' B_i'$ para cada isoterma v , no depende de T . Luego la ecuación de estado de los cuerpos que cumplen la ley de Joule es de la forma

$$p = T \cdot f(v). \quad (14)$$

(Es natural que la ley de Joule se traduzca gráficamente por la condición de ser congruentes las isosteras por una traslación paralela al eje de S ; pues eso quiere decir que la inclinación de las isosteras respecto a dicho eje $tg\alpha = \frac{C_v}{T}$ sólo es función de T , o sea que C_v es independiente de v).

2.º *Cuerpos cualesquiera*: El crecimiento de U entre M y N se evalúa restando del área A la A' . Para $M'N'$ se pone el valor encontrado en la figura 1, $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$.

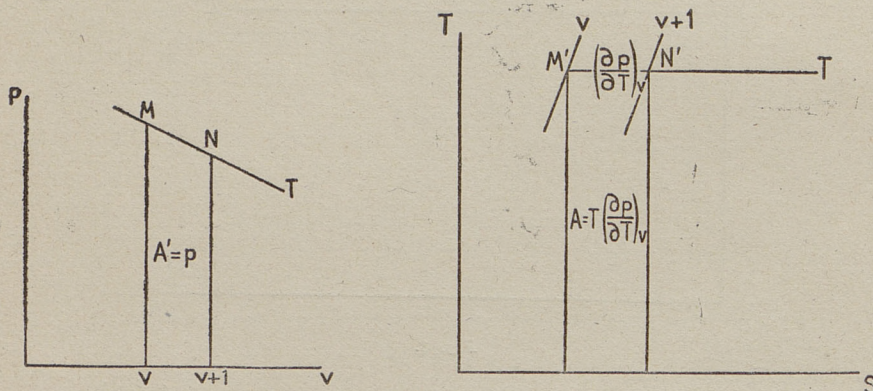


Fig. 10.

$$A - A' = \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p \quad (15)$$

No creemos conveniente alargar más esta parte, incluyendo otras fórmulas (derivadas de los calores específicos, etc.).

3.—DEDUCCION DE LOS EMAGRAMAS QUE SE APLICAN A LA AEROLOGIA

La temperatura potencial θ es una variable de la mayor importancia meteorológica, pues su crecimiento con la altura es la condición para que sea estable el equilibrio. Ahora bien, según hemos demostrado nosotros, para todo fluido es $dS = c_p d\ln\theta$. El diagrama $T, \ln\theta$, puede sustituir al T, S en Meteorología (Tefigrama de Shaw) y también en Oceanografía, dada la escasa variación del calor específico (a^*), (b^*).

El problema de encontrar todos los emagramas que nos interesan se reduce al siguiente: Dado un emagrama x, y y una función x' (x, y) que nos convenga como abscisa, determinar la función y' (x, y) que debemos usar como ordenada para que x', y' sea también emagrama. Para resol.

verlo en nuestro caso no se precisa abordar, como hacen algunos autores, la ecuación en derivadas parciales que expresa la constancia del jacobiano, por más que esa ecuación sea de las más sencillas (\bar{c}). Valiéndonos de la índole especial del problema aerológico, nosotros vamos a dar un método por el que no se precisa ni siquiera realizar cuadraturas:

Las conveniencias de la Aerología nos imponen siempre una coordenada que sólo es función de x o de y . Pues bien, supongamos que haya de ser $x' = f(x)$. Para la conservación de áreas bastará que la nueva ordenada $y' = g(x, y)$ sea tal que:

$$y \, dx = g(x, y) \, df(x) = g(x, y) f'(x) \, dx,$$

o sea que

$$g(x, y) = \frac{y}{f'(x)}. \quad (16)$$

La condición no es necesaria; es decir, la solución hallada no es única; pero es evidente que la diferencia entre ella y cualquiera de las demás tiene que ser función sólo de x . Luego

$$g(x, y) = \frac{y}{f'(x)} + \psi(x) \quad (17)$$

es la solución general. Aplicaremos este método a tres sistemas de fundamental importancia:

1.º En lo que sigue se advertirá la conveniencia de emplear como ordenada

$$y' = \ln p$$

La abscisa correspondiente es

$$x' = \frac{v}{1/p} = v \cdot p \quad (18)$$

Y para gases perfectos

$$x' = RT.$$

Este es el diagrama de Neuhoff (\bar{d}).

2.º También es muy práctica la abscisa $x' = \ln T$. Para gases perfectos podemos referir este diagrama al emagrama anterior $R \ln p$, T , y la ordenada que corresponde es

$$y' = \frac{R \ln p}{1/T} = RT \ln p; \quad (19)$$

este es el moderno diagrama llamado aerograma de Refsdal, acaso el más cuidadosamente ejecutado que existe (\bar{e}).

3.º Por último, resulta recomendable la ordenada $p^{\frac{R}{C_p}}$, hasta el punto de que se viene empleando en el diagrama de Stüve ($p^{\frac{R}{C_p}}$, T), que no

conserva las áreas. Para que resulte un emagrama, refiriéndolo al p, v , habrá de ser:

$$x' = \frac{c_p}{R} \cdot \frac{vp}{y'} = \frac{c_p}{R} vp^{\frac{c_v}{c_p}} \quad (20), \text{ es decir, } x' = c_p \frac{T}{y'} = \frac{c_p}{R} f(S) \quad (20')$$

ya que $vp^{\frac{c_v}{c_p}}$ no varía en las evoluciones isentrópicas. En este emagrama dado por Werenskiöld (*) en 1938 (20') nos dice que las isothermas son hipérbolas equiláteras, como en el p, v ; y las adiabáticas rectas paralelas al eje de ordenadas. Además, x' es proporcional a la temperatura potencial, θ . En efecto, llamando P a la presión de referencia escogida para medir las θ y V al volumen que el gas toma al llegar adiabáticamente a esta presión, se tiene:

$$R\theta = P \cdot V = V \cdot P^{\frac{c_v}{c_p}} \cdot P^{\frac{R}{c_p}} = v \cdot p^{\frac{c_v}{c_p}} \cdot P^{\frac{R}{c_p}}, \text{ de donde } x' = c_p \frac{\theta}{P^{\frac{R}{c_p}}}$$

De esta notabilísima propiedad parece no haberse dado cuenta Werenskiöld, por cuanto no hace la menor mención de ella, y además gradúa el eje X en entropías, renunciando a la posibilidad de convertirlo en una escala regular de temperaturas potenciales, que es una de las mayores ventajas del diagrama.

Tan importante es esa propiedad que ella es la que debería caracterizar al diagrama y servirnos para encontrarlo, razonando del siguiente modo:

Para que un emagrama tenga $x = \theta$, basta que $y = \frac{T}{\frac{d\theta}{dS}}$ y como siempre $\frac{d\theta}{dS} = \frac{\theta}{c_p}$, el sistema

$$x = \theta, \quad y = \frac{c_p T}{\theta}$$

es emagrama para toda clase de flúidos.

Las isothermas serán hipérbolas equiláteras con tal que c_p no dependa de θ .

Para gases perfectos, poniendo $\frac{T}{\theta} = \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}$

resulta el emagrama: $x = \theta, y = c_p \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}$

idéntico al de Werenskiöld, salvo la distribución de las constantes.

Werenskiöld llega a su emagrama resolviendo la ecuación del jacobiano para la ordenada $p^m \cdot v^n$ y aplicando el resultado al caso $m = \frac{R}{c_p}$, $n = 0$. Tal camino, aparte su inútil complicación, tiene la desventaja de proporcionar la abscisa solución en forma tan confusa, que no es extraño

que ni Werenskiöld ni Weickmann se hayan dado cuenta de su verdadero significado $(s)^*$, $(c)^*$, (4).

Respecto a la validez de estos emagramas para flúidos diferentes de los gases de Avogadro, existen ideas erróneas; pues Refsdal, apoyándose desde luego en razonamientos inexactos $(j)^*$, demuestra que los dos primeros son aplicables a todos los flúidos tales que $c_p - c_v = k$. Esta condición no es necesaria ni suficiente. Los gases $(p + a)(v - b) = RT$ *p. e. la* cumplen, y, sin embargo, no les son aplicables dichos emagramas, pues según lo demostrado por nosotros, la condición necesaria y suficiente es que la ecuación de estado sea de la forma

$$p \cdot v = RT + f(p). \quad (21)$$

El motivo de que limitemos nuestro estudio a los anteriores emagramas es que no existe ningún otro en que cada coordenada sea función de una sola de las variables verdaderamente fundamentales en Meteorología p , T y θ . En efecto, sea (x, y) un emagrama. Para que $f(x)$, $g(y)$ lo sea también, es preciso que

$$g(y) = \frac{y}{f'(x)} + \varphi(x)$$

cuya única solución

$$f'(x) = k_1; \quad f(x) = k_1 x + k_3$$

$$\varphi(x) = k_2; \quad g(y) = \frac{y}{k_1} + k_2$$

coincide en el fondo con x, y .

Si añadimos la variable v , ya mucho menos ventajosa que las anteriores, puesto que ni se mide directamente como p y T , ni desempeña el importantísimo papel de θ , resultan, además de p, v , las nuevas parejas v, T y v, θ ; para ellas nuestro método da inmediatamente los emagramas:

$RT, \ln v$; y $v^{-\frac{R}{c_v}}, c_v \left(\frac{R}{P} \right)^{\frac{R}{c_v}} \cdot \theta^{-\frac{R}{c_v}}$. En este último las isotermas son también hipérbolas equiláteras.

Hemos obtenido, pues, para las variables p, T, v, θ , los seis emagramas de coordenadas simples:

$$\begin{array}{cccccc} y = p & T & lp & RT & p \frac{R}{c_p} & v^{-\frac{R}{c_v}} \\ x = v & c_p \theta & RT & lv & c_p P^{-\frac{R}{c_p}} \theta & c_v \left(\frac{R}{P} \right)^{\frac{R}{c_v}} \cdot \theta^{-\frac{R}{c_v}} \end{array}$$

(4) Todavía en 1942 se plantea Schnaidt (u) el problema de calcular energías con el diagrama de Stüve, y da dos procedimientos complicados, uno de ellos a base de introducir en dicho diagrama un nuevo haz de curvas; y el italiano Montalto da en 1942 (u) una tercera solución igualmente artificiosa. Esto prueba que ninguno de los dos se ha percatado de que basta inscribir en cada isobara del diagrama de Stüve, en vez de la diferencia *entre las temperaturas* de la curva de estado y la curva de evolución, la diferencia *entre las temperaturas potenciales* de las mis-

Respecto a los emagramas de coordenadas compuestas, tales como el de Refsdal—único en uso hasta ahora—, veremos que su empleo presenta grandes inconvenientes prácticos.

4.—APLICACIONES HIDRODINAMICAS DE LOS EMAGRAMAS

Contra lo que pudiera creerse, la mayor ventaja meteorológica de los emagramas no consiste en representar fielmente las áreas $\int p. dv$, sino en que representan y sirven para comparar las áreas $\int v. dp$, de mucho más grande importancia hidrodinámica, como vamos a ver.

A) **Las dos interpretaciones del elemento $-vdp$ de área.**—Cuando la curva trazada en un diagrama p, v , representa los sucesivos estados de la unidad de masa de un cuerpo que cruza un campo *estacionario* de presiones, entonces $-vdp = (-v \nabla p. \delta s)$, y como la fuerza vale $-v \nabla p$, el elemento de área $-vdp$, representa el trabajo ejercido por el campo de presiones sobre dicha masa unidad al pasar ésta de la presión p a la $p + dp$, recorriendo el elemento δs de trayectoria.

En cambio, si la curva del diagrama representa los estados simultáneos del medio en una línea flúida (curva de estado), entonces, como $-v \nabla p$ es la aceleración ejercida en cada punto por el campo de presiones, el elemento de área $-vdp = (-v \nabla p. \delta s)$ representa un elemento de la procesión de la aceleración debida a las presiones a lo largo de la línea flúida.

B) **Ecuación de las energías mecánicas.**—La aplicación del principio de conservación de la energía mecánica a un cuerpo que cruza un campo estacionario de presiones (o sea que se mueve sin rozamiento en el seno de un flúido) tropieza con la dificultad de expresar el trabajo realizado sobre el cuerpo por las presiones del campo; pero esta dificultad nos la da resuelta el diagrama p, v , en el cual, según hemos visto, dicho trabajo de las presiones está representado por el área $N M M' N'$, siendo $M N$ la *línea de evolución*. Por tanto, si las fuerzas exteriores derivan de un po-

tencial ψ , la ecuación de conservación de la energía mecánica es:

$$-\Delta A = \Delta \left(\psi + \frac{c^2}{2} \right) \quad (22)$$

$$\text{o bien:} \quad \psi + \frac{c^2}{2} + A =$$

$$= \psi_0 + \frac{c_0^2}{2} + A_0 \quad (22)'$$

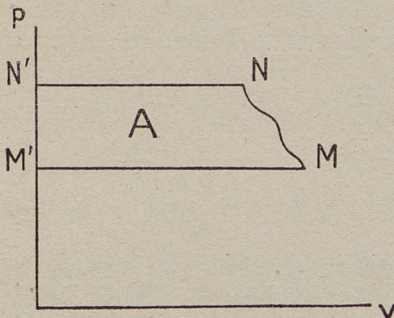


Fig. 11.

mas, para obtener el área que ambas curvas encierran en el emagrama $p \frac{R}{cp}$, θ ; es decir, un área que nos representa la energía.

y si el v del cuerpo es constante $= v_0$

$$\psi + \frac{c^2}{2} + v_0 p = K \quad (22)''$$

Si el móvil es el mismo fluido que llena el medio, en movimiento estacionario, la conservación individual $(22)'$ puede enunciarse como conservación geométrica para todos los puntos de cada línea de flujo (trayectoria).

C) **Ecuación de la energía total.**—Sumando la fórmula (22) a la de la evolución termodinámica de la substancia móvil $Q = \Delta(U + A')$ resulta la:

$$\begin{aligned} Q &= \Delta\left(\psi + \frac{c^2}{2} + U + A + A'\right) = \\ &= \Delta\left(\psi + \frac{c^2}{2} + U + pv\right) \end{aligned}$$

o sea la:

$$Q = \Delta\left(\psi + \frac{c^2}{2} + W\right) \quad (23)$$

en que W es la entalpia * .

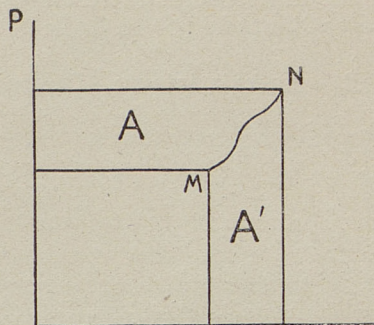


Fig. 12.

D) **Teorema de la circulación.**—Al calcular la aceleración de la circulación en una curva flúida, o lo que es igual (Kelvin), la circulación de la aceleración, podemos prescindir de las fuerzas potenciales, ya que su aceleración tiene circulación nula.

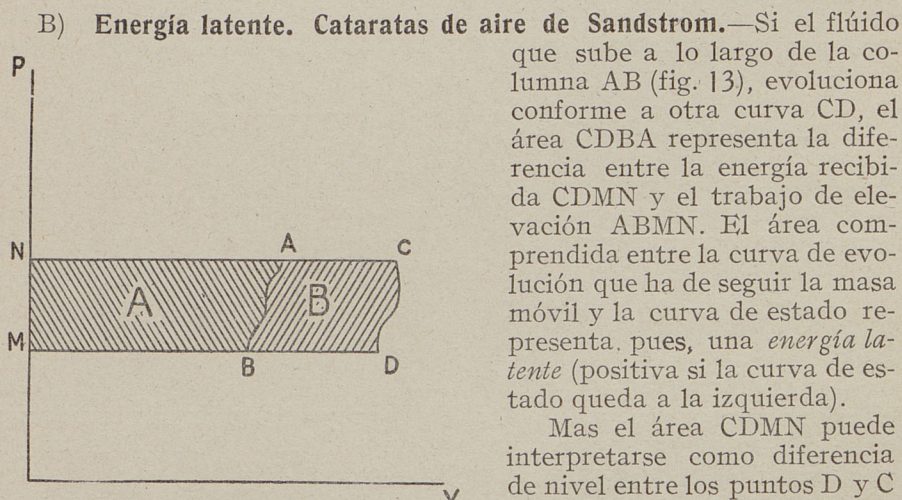
Resta, pues, la circulación de la aceleración debida a las presiones: según A) dicha circulación es igual al área encerrada por la curva de estado que representa en el diagrama p, v a la línea flúida. El sentido de la aceleración circulatoria es el de las agujas del reloj en p, v , que es el que hace negativa a $\int v dp$. Pero medir esa área es lo mismo que contar los solenoides unidad p, v , que contiene, que son los mismos que la curva flúida abarca en el espacio; luego la aceleración de la circulación en toda curva flúida cerrada es igual al número de solenoides unidad abarcados por ella.

Para flúidos homogéneos o autobarótrópos resultan los teoremas de conservación de Helmholtz.

(5) Como la fuerza de Coriolis no trabaja, las ecuaciones (22) , $(22)^I$, $(22)^{II}$ y (23) valen también para ejes fijos en la tierra, con tal que entonces ψ designe el potencial de la gravitación conjunta (newtoniana más centrífuga).

5.—APLICACION AL ESTUDIO DE COLUMNAS FLUIDAS

A) **Representación de los geopotenciales.**—Si A B (fig. 13) representa una columna fluida en equilibrio estático, es evidente que la misma línea representará la evolución de una masa que suba de A a B, de modo que su estado sea en todos los puntos igual al del fluido de la columna. Mas en virtud del principio de Arquímedes, el trabajo recibido del campo de presión por esa masa unidad (representado, como sabemos, por el área A) es igual a la diferencia de potencial entre B y A. Luego la diferencia de potencial entre los extremos de una columna en equilibrio es el área limitada por su línea de estado y sus isobaras extremas.



Mas el área CDMN puede interpretarse como diferencia de nivel entre los puntos D y C en una columna ideal cuyo estado fuese CD. Luego la energía latente CDBA es igual al trabajo de caída de la unidad de masa desde el nivel de la isobara MD en la columna ficticia CD, hasta el nivel de la misma isobara en la columna AB. La subida de un fluido en el seno de otro es así asimilable a un salto de agua (g).

(Autores tan destacados como Exner, Koschmieder y Brunt, etc., exponen estos teoremas haciendo cálculos que no descubren su interpretación física, y poniendo en juego, inexplicablemente, la ecuación de los gases. Algunos acuden a consideraciones sobre el calor de dilatación que no tiene relación directa con estos efectos).

C) **Desarrollo gráfico de la estática atmosférica.**—El área ABMN que representa la diferencia $H_B - H_A$ de potenciales, es igual a la $A'B'M'N'$ correspondiente en el diagrama $R \cdot \ln p$, T. Llamando T_m a la abscisa media de $A'B'$, se tiene:

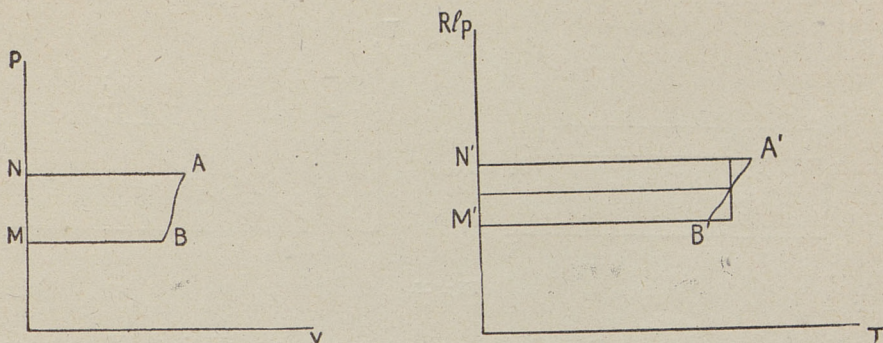


Fig. 14.

$$H_B - H_A = RT_m l \frac{p_A}{p_B}. \quad (24)$$

El problema inverso (reducción de presiones) lo resuelve la fórmula:

$$p_B = p_A \cdot e^{\frac{H_A - H_B}{RT_m}}. \quad (25)$$

La llamada temperatura media barométrica T_m es por definición:

$$T_m = \frac{H_B - H_A}{R(lp_A - lp_B)} = \frac{H_B - H_A}{\int_{A'}^{B'} \frac{dH}{T}}$$

y poniendo g constante:

$$T_m = \frac{Z_B - Z_A}{\int_{A'}^{B'} \frac{dz}{T}} \quad (26)$$

fórmula que da T_m en función de la distribución vertical de T .

D) **Enfriamiento del aire por elevación adiabática.**—Si el aire que sube de A a B está a la misma temperatura que el exterior, el área ABCD = dH . Ese área representa la diferencia entre el calor recibido en la isobara D'A' y en la B'C', pues ni en A'B' ni en C'D' se recibe calor; luego:

$$-c_p dT = dH, \text{ o sea } \gamma = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} \quad (27) \quad (6)^*$$

(6) Esta demostración no se apoya en el segundo principio de la Termodinámica. Recuerdese que para cuerpos tales que $p \cdot v = RT$, y $\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_T = 0$ la existencia de la función S tal que en los procesos reversibles $dS = \frac{\delta Q}{T}$ es consecuencia del primer principio.

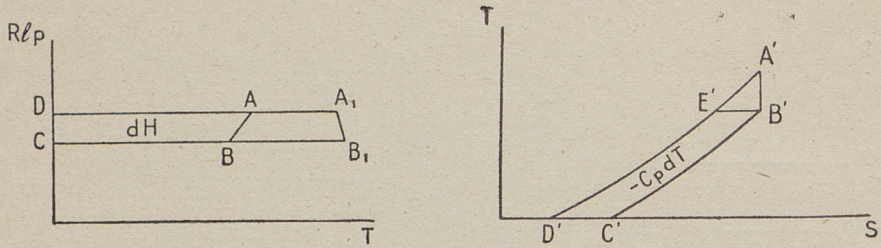


Fig. 15.

Si el aire exterior A_1B_1 se halla a una temperatura distinta T' , se tiene:

$$-c_p dT = \frac{T}{T'} dH, \text{ o sea } -\frac{dT}{dz} = \frac{T}{T'} \gamma. \quad (28)$$

Si el medio exterior no es aire, en el diagrama p, v , obtendríamos:

$$\frac{ABCD}{A_1B_1CD} = \frac{v}{v'}; \quad -\frac{dT}{dz} = \frac{v}{v'} \gamma. \quad (28)'$$

E) **Elevación no adiabática.**—Si el aire ascendente evoluciona en AB con el calor específico c , distinto ahora de O , el calor absorbido en el ciclo $A'B'C'D'$ será $(c - c_p) \cdot dT$, luego

$$\gamma_c = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p - c}. \quad (29)$$

Aplicación: Gradiente de la atmósfera isopícnica: En ella el descenso de T con la altura será igual al enfriamiento individual de una masa que se eleve evolucionando a volumen constante. Luego poniendo $c = C_v$

$$-\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p - c_v} = \frac{g}{R} \quad (30) \quad (\text{gradiente límite del espejismo}).$$

6.—ELECCION PRACTICA DE UN DIAGRAMA TERMODINAMICO METEOROLOGICO

En teoría, todos los diagramas termodinámicos dan medios para determinar un punto de rocío, un nivel de condensación, el espesor de u estrato, etc., etc.; todo se reduce a buscar las intersecciones de ciertas líneas que no faltan en ningún diagrama, o a medir las áreas que encierran. Pero nuestra elección habrá de recaer en el diagrama que por sus cualidades nos permita el trazado de las líneas auxiliares con mayor precisión y comodidad. Claro que las cualidades a que nos referimos en esta

Tampoco es condición precisa la constancia de c_p (gases perfectos). Basta que c_p sea función de T (gases de Avogadro) para que en virtud de la igualdad de los trayectos isobáricos $B'C'$ y $E'D'$ el calor absorbido se reduzca al que corresponde al arco $E'A'$, o sea $-c_p dT$.

Memoria teórica no tienen nada que ver con la ejecución material del diagrama. Buscamos aquí, por el contrario, aquellas condiciones matemáticas de los sistemas coordinados, que a igualdad de medios materiales de ejecución, tengan que traducirse en una mayor exactitud y facilidad práctica de las construcciones.

Hasta ahora esta facilidad de interpolación de líneas auxiliares se procuraba llenando los diagramas meteorológicos de redes sumamente tupidas de curvas impresas, con gran perjuicio para la claridad. Basta ver, por ejemplo, el diagrama de Refsdal, sobre todo en la versión más moderna, para convencerse de que por tal camino ese fin no se logra. Nosotros procuraremos conseguirlo buscando diagramas en los cuales las curvas que hayamos de interpolar sean superponibles—las de cada haz—por una traslación. Esto nos permitirá determinar sus intersecciones con otras por medio de escuadras y compases, o mejor aún, de plantillas adecuadas, bien fáciles de construir ^{*}(7).

A) **La condición de congruencia de las líneas fundamentales.**—En nuestro caso estas líneas son las isobaras, las isotermas, las adiabáticas y las equisaturadas (saturadas con la misma cantidad de agua x_m , por unidad de masa de aire seco). Eliminamos, pues, el diagrama de Refsdal ($RT \ln p, \ln T$) en que las isobaras son ya desiguales, y el de Werenskiöld en que lo son las isotermas (pág. 14). Restan, entre los emagramas principales, el tefograma y el $\ln p, T$.

La condición para que las líneas de un haz sean congruentes por una traslación paralela a un eje (por ejemplo, al OX), es:

$$x = F(y) + K, \quad \text{o sea} \quad \frac{dx}{dy} = \varphi(y). \quad (31)$$

B) **La congruencia de líneas en el tefograma.**—Aplicando la condición al tefograma resulta, siendo c el calor específico de la evolución representada por las líneas del haz:

$$\frac{dS}{dT} = \frac{c}{T} = f(T) \quad \text{o sea} \quad c = \psi(T) \quad (32)$$

La condición necesaria y suficiente para la congruencia es que el calor específico sea, para todas las líneas del haz, la misma función de la temperatura. A las evoluciones en que el calor específico tiene esa propiedad las hemos llamado nosotros termotrópicas en un breve estudio ^{*}(h). Es evidente que, dentro de su gran generalidad, constituyen un modo de los más sencillos de cambiar de estado las substancias. Son termotrópicas las evoluciones isotermas y adiabáticas de toda substancia, y las isobaras y las isosteras de los gases de Avogadro. Las curvas correspondientes vienen, pues, representadas en el tefograma por haces congruentes mediante una traslación paralela al eje de S.

(7) Con ser tan obvia la conveniencia práctica de esta propiedad, los meteorólogos están tan lejos de utilizarla, que actualmente son preferidos en la técnica aerológica dos diagramas que no la poseen: el de Stüve y el de Refsdal.

Respecto a las curvas isosaturadas, comencemos por observar que la curva de equilibrio del vapor saturante, con la cual guardan estrecha relación, representa una evolución termotrópica. En efecto, el calor específico c_s del vapor saturante es, como todas las propiedades del vapor en la curva de equilibrio, función sólo de la temperatura. Aproximadamente:

$$c_s = c'_p - V' \frac{dE}{dT} \simeq c'_p - \frac{L}{T} \quad (33)$$

Ahora bien: en toda mezcla de 1 de aire con x de vapor (tratada como mezcla de gases de Avogadro) en virtud de la comunidad de volumen y

temperatura se mantiene constante $\frac{p}{e}$, siendo precisamente:

$$\frac{p}{e} = \frac{\varepsilon + x}{x} \quad (34)$$

en que ε designa la densidad del vapor referida a la del aire en igualdad de condiciones. Las constantes de la mezcla saturada con x_m de vapor son:

$$c_{pM} = \frac{c_p + x_m c'_p}{1 + x_m}; R_M = \frac{R + x_m R'}{1 + x_m}.$$

Por tanto:

$$cdT = \frac{c_p + x_m c'_p}{1 + x_m} dT - \frac{R + x_m R'}{1 + x_m} T \frac{dp}{p} \quad (35)$$

luego en virtud de (34)

$$c = \frac{c_p + x_m c'_p}{1 + x_m} - \frac{R + x_m R'}{1 + x_m} \cdot \frac{T}{E} \cdot \frac{dE}{dT}. \quad (35)'$$

Para que c fuese independiente de x_m se precisaría, en rigor, que

$\frac{c_p}{R} = \frac{c'_p}{R'}$, lo cual no puede cumplirse por ser triatómico el vapor de agua. Pero, en virtud de la pequeñez de x_m en las condiciones atmosféricas,

$$c \simeq c_p - R \frac{T}{E} \cdot \frac{dE}{dT}, \quad (35)''$$

función sólo de T . Así, pues, dentro de la aproximación gráfica las equisaturadas son iguales en el tefigrama. (Shaw afirma que para ello es condición precisa que L sea constante) (α^*).

El tefigrama se presta, pues, a la interpolación de las curvas auxiliares. Pero nos inducen a descartarlo tres inconvenientes, derivados todos de la curvatura de las isobaras en este sistema. 1.^o Por falta de costumbre, a la generalidad de los operadores le resulta incómodo marcar puntos en coordenadas curvilíneas. 2.^o No es agradable en la práctica necesitar a veces interpolar una curva para reconocer cuál de dos puntos está a menor presión, o sea mayor altitud. 3.^o Si bien esos dos inconvenientes pueden remediarse con el ejercicio, en cambio es indiscutible que, como luego veremos, el tefigrama es el diagrama menos práctico para la medida de geopotenciales.

C) **Congruencia de las líneas fundamentales en los diagramas $\ln p$, $f(T)$.**—El diagrama $\ln p$, T , a que hemos llegado por exclusión, está libre de esos tres inconvenientes. Además en él la condición de congruencia de las curvas de un haz, por traslación paralela al eje de las p , es:

$$\frac{d\ln p}{dT} = \varphi(T);$$

y como sabemos que para el calor específico c :

$$\frac{d\ln p}{dT} = \frac{c_p - c}{RT} \quad (36)$$

resulta que en este diagrama vienen representadas por curvas congruentes las evoluciones termotrópicas de cada tipo.

En cuanto a las líneas equisaturadas, de (34) se deduce:

$$\ln p = \ln E + f(x_m) = \psi(T) + f(x_m) \quad (37)$$

luego todas ellas son congruentes con la curva de equilibrio. No hay que extrañar que esto ocurra, a pesar de ser, como hemos demostrado, función de x_m el calor específico. Nótese que también R es función de x_m ,

y la condición necesaria es que $\frac{c_p - c}{R}$ no lo sea, como ocurre aquí, pues:

$$\frac{c_{pM} - c}{R_M} = \frac{[R + x_m R'] \frac{T}{E} \cdot \frac{dE}{dT}}{R + x_m R'} = \frac{T}{E} \cdot \frac{dE}{dT} \quad (38) \quad (*)$$

D) **Sistemas coordenados $\log p$, $\frac{1}{T}$, y $\log p$, $\log T$.**—Queda, pues,

(8) Resuelta, con la facilidad que hemos visto, la congruencia de las líneas interesantes en Aerología, para traslaciones paralelas a los ejes S y $\ln p$, no tiene objeto el apurar el problema para otros ejes o para otros sistemas coordenados.

demostrado que entre los emagramas, el $\ln p$, $R'T$ es el que permite construir las líneas auxiliares con más comodidad y exactitud, con tal de servirse de plantillas, para sacar partido de la congruencia de las líneas fundamentales. Pero es claro que esta propiedad la comparten con él todos los diagramas de tipo $\log p$, $f(T)$, aunque ninguno otro es emagrama.

Interesante entre ellos es el $\log p$, $\frac{1}{T}$, en el cual es sensiblemente recta la línea E, T de equilibrio, y también, por tanto, las líneas equisaturadas. De este diagrama nos hemos servido nosotros para construir ábacos para reducir las presiones al nivel del mar, en estaciones fijas, formados sólo de rectas, y tan exactos, por lo menos, como las tablas de tipo internacional. Fuera de eso, no sabemos que se haya empleado para fines meteorológicos.

Por el contrario, el diagrama $\log p$, $\log T$, caído en desuso hoy, es de los más antiguos en Meteorología ⁽ⁱ⁾. Se le empleó en las primitivas tablas de adiabáticas de Hertz, para aprovechar la propiedad de las adiabáticas de ser rectas paralelas. Fué abandonado por no haber sido descubiertas sus cualidades más importantes. Todavía la reseña que hace de él Refsdal no las menciona; sólo consigna la de las adiabáticas y añade, como última conclusión, que también son rectas paralelas las isosteras, dando de ello una demostración independiente ^(f).

En realidad, el paralelismo de unas y el de otras líneas son casos particulares de una propiedad que es la más importante, a saber: En este diagrama son rectas paralelas las líneas representantes de las evoluciones politrópicas, o sea de aquellas evoluciones en que es constante el calor específico; isotermas, adiabáticas, isobaras, isosteras, etc.

En efecto, la ecuación (36), puesta en la forma:

$$\frac{dlp}{dT} = \frac{c_p - c}{R} \quad (39)$$

significa que las evoluciones politrópicas ($c = \text{constante}$) en el sistema $\ln p$, $\ln T$, tienen constante el coeficiente angular. La ecuación finita de la que pasa por el punto (p_0, T_0) es:

$$lp - lp_0 = \frac{c_p - c}{R} (\ln T - \ln T_0), \quad \text{de donde } \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{c_p - c}{R}} \quad (40)$$

de la cual es un caso particular la ecuación de Poisson.

De esta propiedad del diagrama $\ln p$, $\ln T$ es de la que vamos a sacar partido para la resolución de problemas meteorológicos.

7 (9).—EL DIAGRAMA POLITRÓPICO Y SUS APLICACIONES

A) **Las columnas politrópicas.**—Llamamos así a aquellas en que el descenso de temperatura con la altura $\alpha = -\frac{\partial T}{\partial z}$ es constante. Es evidente que la curva de estado de toda columna politrópica coincidirá con la curva de evolución de un elemento de masa que se eleve en su seno, de modo que $\gamma_c = -\frac{dT}{dz} = \alpha$. Pero según (29) la condición para que esto suceda es que $c = K$, es decir, que la evolución de la masa ascendente sea politrópica. Luego:

«Toda columna politrópica viene representada en el diagrama $\ln p, \ln T$ por una recta». Su ecuación será:

$$\ln p - \ln p_0 = \frac{c_p - K}{R} (\ln T - \ln T_0)$$

y con la condición

$$c_p - K = \frac{g}{\alpha}$$

toma la forma

$$\ln p - \ln p_0 = \frac{g}{R\alpha} (\ln T - \ln T_0) \text{ de donde}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\alpha}} = \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\alpha}} \quad (41)$$

Esta fórmula que por permitir el cálculo de p , en función de p_0 , T_0 y z es una fórmula barométrica exacta, no se usa en Meteorología porque no resulta cómoda para el cálculo numérico. Nos proponemos, no obstante, demostrar que es la que mejor sirve para calcular gráficamente geopotenciales.

La importancia práctica de las columnas politrópicas consiste en que los sondeos demuestran que la atmósfera está dividida en estratos, dentro de cada uno de los cuales la temperatura varía linealmente con la altura, si bien α salta bruscamente de unos a otros; las discontinuidades de la atmósfera son, pues, realmente discontinuidades de primer orden. Por tanto, la línea de estado de la atmósfera vendrá *verdaderamente* representada en el diagrama $\ln p, \ln T$ por una quebrada. Decimos verdaderamente porque también en los otros diagramas, después de inscribir los puntos de discontinuidad de α o *puntos notables* del sondeo, se les une

(9) Un diagrama politrópico, cuidadosamente delineado según nuestras instrucciones, estaba ensayándose en el Servicio Meteorológico Nacional al estallar la guerra, durante la cual desapareció. La precisión con que realizábamos por medio de él las nivelaciones barométricas aerológicas era comparable a la alcanzada con las tablas de Bjerknes.

por rectas, y se supone que los segmentos así obtenidos son las líneas de estado de las columnas de aire correspondientes: es decir, se hace acerca de la distribución vertical de la temperatura una hipótesis complicada, distinta para cada trazo y falta de base experimental. El error cometido de este modo no es despreciable, sobre todo en la alta troposfera, en que, por escasear las discontinuidades, se unen frecuentemente puntos distantes más de seis kilómetros. Se impone, pues, el uso del sistema $\ln p - \ln T$, para representar fielmente las líneas de estado de las distintas «masas de aire».

B) **El diagrama politrópico.**—En vista de esto, asociamos, como indica la figura 16, a un diagrama $\ln p, T$, una escala $\ln T$, trazada en el borde superior. En el borde derecho va una escala de *alturas dinámicas*, que, como veremos en seguida, nos servirá para establecer muy fácilmente el potencial geodinámico de cada punto del sondeo. Para evitar la confusión de líneas sólo se imprimirán las isobaras (de 10 en 10 milibares) las isotermas, de la escala natural de temperaturas, y un denso haz de adiabáticas de saturación. Se suprimen en absoluto las adiabáticas de aire seco y las líneas equisaturadas, que serán suplidas por una plantilla con un *borde equisaturado* y otro *adiabático*. Tampoco se imprimen las isotermas de la escala logarítmica de temperaturas: para marcar puntos ($\ln p, \ln T$) se usa un cartabón. La escala logarítmica de presiones abarcará de 1.050 a 100 mb., pero el intervalo entre los 1.000 y los 100 servirá como intervalo 100-10 en los altos sondeos. Es claro que para esta última graduación no resulta necesario el empleo de nuevas plantillas, puesto que la inclinación de las curvas de ambos haces respecto a las isotermas es la misma función de la temperatura para ambas graduaciones.

Las únicas líneas que por este cambio de escala pierden su validez son las adiabáticas de aire saturado; mas no vale la pena de trazar las correspondientes a presiones menores de 100 mb., ya que a las bajas temperaturas que reinan a esos niveles la humedad pierde todo su interés termodinámico, hasta tal punto que, ya desde presiones más altas, en los Servicios Meteorológicos se omiten sistemáticamente los cálculos de humedad. Del mismo modo es fácil ver que las temperaturas potenciales se leen sin dificultad en el segundo intervalo con las mismas escalas del primero, aunque no hay inconveniente en preparar escalas distintas para mayor rapidez; nosotros creemos conveniente disponer, para el primer intervalo, aparte de la escala de temperaturas a 1.000 mb., otra escala auxiliar en la isoterma de -30 ; para el segundo intervalo podrían disponerse en la isobara del 100, e isoterma de -50 . También se suprime la escala de x_m que llevan otros diagramas hacia la isobara de 1.000 mb.

Al exponer los modos de operar con este diagrama, explicaremos el ajuste de las distintas escalas y plantillas.

C) **Determinación de geopotenciales.**—En esto consiste acaso la mayor ventaja de este diagrama. Para que se aprecie mejor, vamos a comparar nuestro método con los demás.

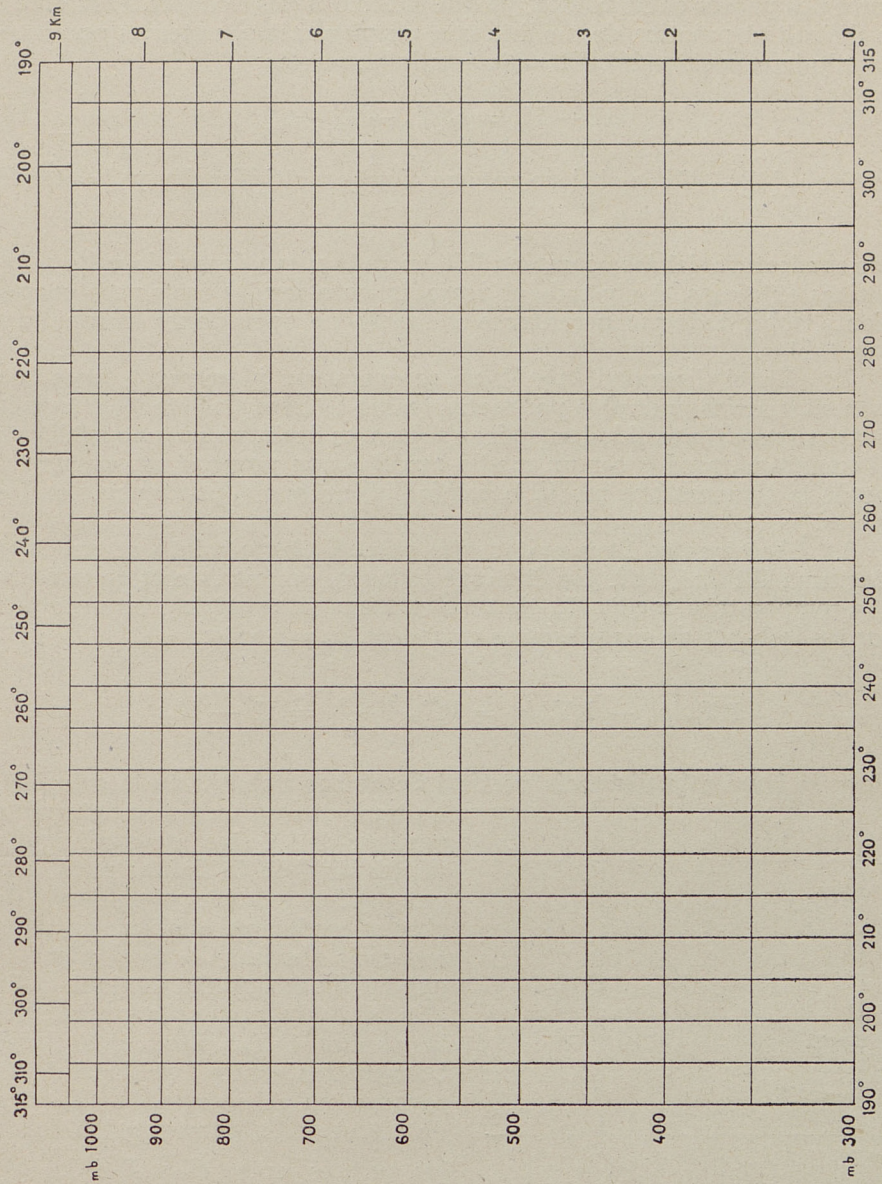


Fig. 16.

Fragmento del diagrama politrópico.

1.° Tefigrama: El área que representa en él la diferencia de nive entre dos puntos es curvilínea, ya que la limitan dos isobaras. Para evitar la dificultad práctica de medirla con un planímetro, notemos que integrando la ecuación (29) $dH = (c - c_p) dT$, resulta:

$$H - H_0 = c_p [T_0 - T] + Q \quad (42)$$

en que $c_p [T_0 - T]$ se obtiene por una simple multiplicación y $Q = \int_{H_0}^H T dS$

por cuadratura del área comprendida entre la curva de estado y las adiabáticas extremas. Así y todo el procedimiento resulta muy poco conveniente, sobre todo por necesitarse el auxilio de operaciones aritméticas o de tablas.

2.° En el diagrama $\ln p, T$, no se opera con planímetro, pues aún para superficies limitadas por rectas (salvo la línea de estado) conviene evitar su uso. En realidad se aplican tablas, es decir, un método analítico: El emagrama pasa a ser un medio auxiliar que proporciona exclusivamente la temperatura media barométrica, necesaria para entrar en las tablas.

3.° Aerograma: Para evitar este procedimiento mixto se aplica el diagrama $RT \ln p, \ln T$. En él el segmento de ordenada correspondiente a la temperatura media T_m de una columna atmosférica, interceptado por las isobaras de sus presiones extremas, p_0 y p vale:

$$RT_m \ln p_0 - RT_m \ln p = RT_m \ln \frac{p_0}{p} = H - H_0;$$

luego es igual a la distancia vertical de ambas isobaras en la columna.

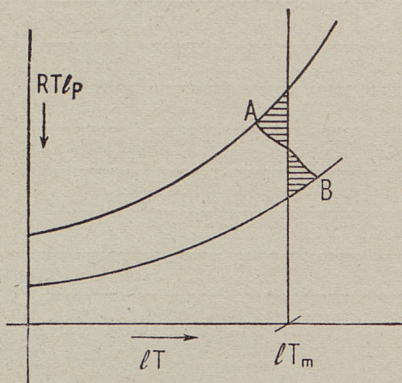


Fig. 17.

La temperatura media se determina por igualdad de las áreas triangulares rayadas en la figura; pues aunque aquí no se hable propiamente de abscisa media, ya que son infinitas todas las abscisas del arco, sabemos que en un emagrama cualquiera de abscisa $F(T)$, con origen accesible, la abscisa $F(T_m)$ intercepta áreas triangulares iguales, homólogas de las rayadas en el aerograma. (En vez de esta sencilla demostración todos los aurores, entre ellos Refsdal^{*} (*f*), inventor del aerograma, recurren a prolijos cálculos directos) (*j*)^{*}.

Este procedimiento permite sin duda la medida de alturas dinámicas por simple aplicación de una escala; pero obliga a sumar numéricamente los espesores de los sucesivos es-

tratos, si se quiere obtener la función $p(z)$, y nos fuerza a emplear un diagrama de ejes oblicuos, de isobaras desiguales, en el cual, por tanto, las facilidades de interpolación de líneas son incompatibles con la claridad.

4.º Método de Stüve: El artificio de la temperatura media, aplicado en todos los procedimientos anteriores, equivale a reemplazar la columna que se quiere medir por otra, isoterma, del mismo espesor vertical y situada entre las mismas presiones. En cambio, Stüve sustituye la columna real por otra adiabática de la misma temperatura media, en la

cual, medida la constancia de $-\frac{dT}{dH} = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{c_p}$ las variaciones de temperaturas se refieren inmediatamente a diferencias de nivel.

Para mejor interpolar las adiabáticas aplica Stüve el diagrama $\frac{R}{p c_p}, T$, en que son rectas, sin reparar que con más aproximación aún se

interpolan por medio de una plantilla en el diagrama $\ln p, T$; y que en el suyo, por no ser emagrama, no se pueden determinar con precisión las temperaturas medias, siendo muy apreciables los errores que se cometen para grandes intervalos de presiones (por ejemplo, al determinar la diferencia de nivel entre los 300 y los 200 mb., como hay que hacer diariamente en la práctica).

5.º Método politrópico: En vista de estos inconvenientes, y ya que la atmósfera está dividida en estratos politrópicos, nosotros nos abstenemos de sustituir por otros estos estratos. Los representamos por la recta correspondiente en el sistema $\log. p, \log. T$ y calculamos su espesor mediante la construcción indicada en la figura. He aquí el fundamento: Si AB representa un estrato politrópico, hemos visto que su coeficiente angular vale

$$tg\beta = \frac{d \log p}{d \log T} = \frac{g}{R\alpha} = -\frac{\Delta H}{R\Delta T}$$

luego si A'A₁ es la paralela a AB trazada por el punto de coordenadas z'_A, T_A (z' altura en metros dinámicos), se tendrá

$$\Delta z' = -10R\Delta T \cdot tg\beta \quad (43)$$

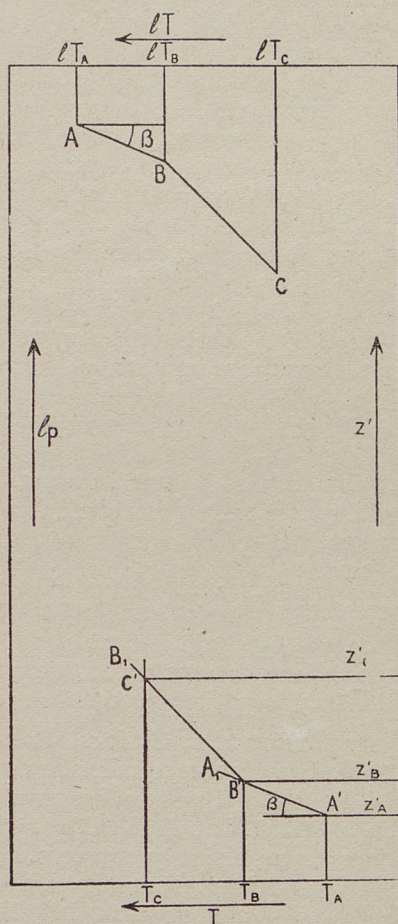


Fig. 18.

que nos dice que si B' es el punto de intersección de $A'A_1$ con la ordenada T_B , la altura dinámica de B será precisamente la coordenada z'_B de B' y del mismo modo z'_C la del punto C, etc.

Nótese que de este modo no sólo hemos evitado las temperaturas medias, con el gasto de tiempo, las inexactitudes y la dificultad inherentes a su determinación, sino que además hemos establecido una correspondencia *completa* de los puntos del sondeo con sus geopotenciales, cosa que no se consigue por los procedimientos anteriores. En efecto, la sustitución de la columna real por la ideal sólo es exacta para *todo* el estrato para el cual se determina la temperatura media, pero no para cada una de sus partes; en un estrato de temperatura decreciente con la altura, la temperatura media de todo él es más alta que la que habría que aplicar para medir su mitad superior y más baja que la de su mitad inferior. Obsérvese también que nuestro método nos excusa *en todo caso* de determinar temperaturas medias, puesto que sólo falla cuando la columna es isoterma; es decir, cuando la temperatura media no se necesita. Para este caso el diagrama lleva unas escalas que dan la correspondencia exacta de los intervalos de presión con la diferencia de nivel a las distintas temperaturas.

Para ajustar unas a otras las escalas de T y z' , se hace que sobre una recta del sistema $\log. p$, $\log. T$, que represente una adiabática, en el sistema z' , T , la variación de z' correspondiente a 10° de T , sea de 1002 metros dinámicos. Además, como ambas escalas z' , T , son naturales no hay inconveniente en variarlas ambas en la misma proporción, según el grado de exactitud que se precise en cada problema; esto no puede hacerse en los demás diagramas, en que una de las escalas no es natural. Por eso en ellos, para que alcancen a las alturas estratosféricas, hay que emplear una escala de niveles de muy poca precisión. En el de Stüve, por ejemplo, un kilómetro geodinámico viene representado por tres centímetros. El diagrama politrópico es, pues, el único que une la posibilidad de una suma precisión de medida en intervalos especialmente interesantes, a la posibilidad de representar a grandes rasgos la distribución vertical de presiones hasta los más altos niveles.

D) Estudio de la evolución de columnas de aire.—Problema de suma dificultad es el de determinar el estado final de una columna de aire, cuyos elementos evolucionan conforme a una ley conocida (por lo común adiabática o politrópicamente). Prueba de ello es la multitud de autores (Exner, Haurwitz, Steiner, Rossby, Refsdal, Ertel (k^*), etc.), que han estudiado y siguen estudiando este tema; lo cual demuestra, a la vez que la dificultad del mismo, su gran importancia para la Meteorología práctica y teórica. Con él se enlazan el problema del diagnóstico de las advecciones troposférica y estratosférica; el influjo de la estratosfera en el tiempo; el origen y constitución de las depresiones y la fase e intensidad de las componentes primaria y secundaria de las ondas de presión, etcétera, etc.

Como la solución analítica exacta del problema es imposible, los esfuerzos de los investigadores se encaminan a buscar fórmulas de simplificación aproximadas que permitan obtener resultados numéricos útiles; pero a pesar de las simplificaciones siempre son menester medidas planimétricas; es decir, que las operaciones analíticas sólo sirven para preparar el problema para su resolución gráfica. Por tanto, es más razonable abordarlo desde luego gráficamente, y así lo ha hecho, entre otros, Refsdal, valiéndose de su aerograma ^{*}(f).

Ahora bien, nosotros vamos a ver que el único diagrama que verdaderamente se presta a resolver esta cuestión es el nuestro: 1.º Porque sólo en él puede representarse fielmente el estado inicial de la columna y los caminos de evolución de sus diversas masas. 2.º Porque en los demás diagramas resulta casi imposible deducir de la curva final las variaciones individuales y locales del espesor, presión, temperatura, gradiente térmico, etc.

Nada más fácil, sin embargo, si nos valemos de nuestro diagrama. Supongamos que queremos estudiar la contracción adiabática ocasionada en una columna AB, por advección de aire a su parte superior. La columna es un segmento rectilíneo; las líneas de evolución son rectas paralelas, que habrán de limitarse de modo que el crecimiento de la presión sea el mismo a lo largo de todas. Ejecutada así, por puntos, la construcción del estado final A'B', se procede a trasladarlo al diagrama T z' y a determinar con suma rapidez y con cuanta exactitud se desee, sin necesidad de cuadraturas, la distribución individual y geométrica de la presión, temperatura y gradiente térmico en la columna resultante. De modo análogo se opera en los problemas inversos, en los casos en que haya evaporación o condensaciones y cuando se produzca subversión de los estratos atmosféricos.

Aplicación 1.ª Variación individual del gradiente térmico.—En la figura 20 AB es el estado inicial y A'B' el final de un elemento de co-

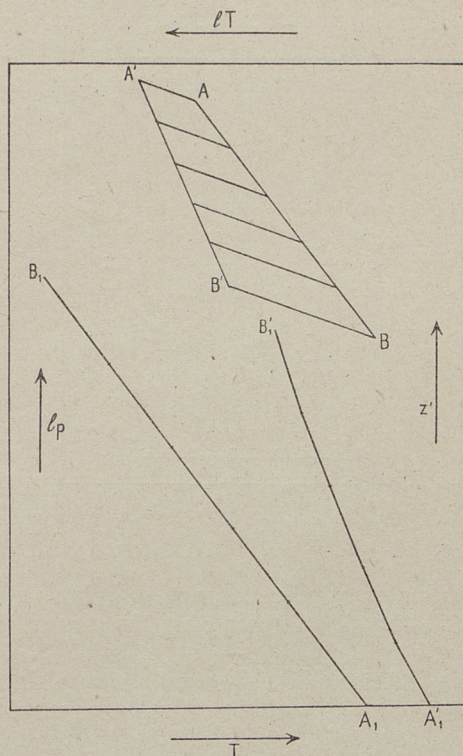


Fig. 19.

lumna, y las paralelas A A' y B B' las adiabáticas de evolución de sus extremos. Llamando Δp a la diferencia constante de presión entre ellos escribamos que el segmento AP no varía en la transformación. Como dicho segmento es proporcional al producto $\overline{MN} (\gamma - \alpha)$, resulta:

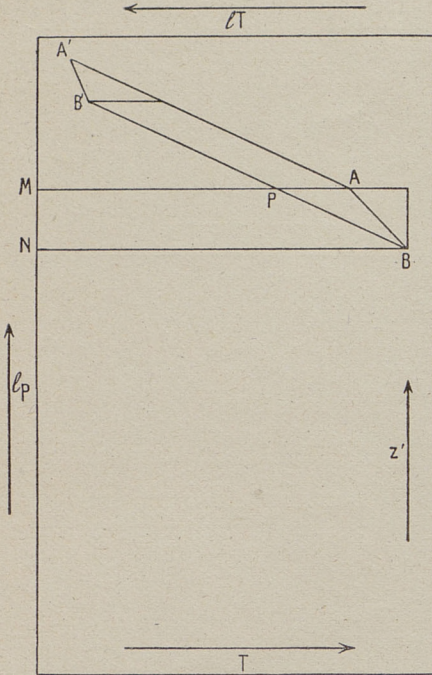


Fig. 20.

$$\overline{MN}(\gamma - \alpha) = \frac{\Delta p}{p} (\gamma - \alpha) = \text{inv};$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{p} = \text{inv.} \quad (44)$$

que es el invariante de Margules.

En el caso de evolución politrópica de calor específico c , como también son paralelas las líneas de evolución, el mismo razonamiento nos conduce a la fórmula:

$$\frac{\gamma_c - \alpha}{p} = \text{inv.} \quad (44)^I$$

de la cual es caso particular la anterior. Sin dificultad ninguna se pasa a los invariantes

$$\frac{\gamma - \alpha}{p \cdot s} = \text{inv.} \quad (44)^{II};$$

$$\frac{\gamma_c - \alpha}{ps} = \text{inv.} \quad (44)^{III}$$

válidos cuando la columna cambia de sección, s (l).

Aplicación 2.^a Ascenso de aire en columnas politrópicas.—a) *Ecuaciones de evolución.*—En la figura 21 la recta AB representa la politrópica de evolución de una burbuja de aire ascendente y la recta CD la politrópica de estado del aire circundante. Expresando la proporcionalidad inversa de sus coeficientes angulares a los gradientes γ y α , resulta:

$$\frac{lT - lT_0}{\gamma} = \frac{lT_a - lT_{a0}}{\alpha} \quad (45)$$

$$\text{de donde } \frac{T}{T_0} = \left(\frac{T_a}{T_{a0}} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} = \left(1 - \frac{\alpha z}{T_{a0}} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} \quad (45)$$

Queda así directamente establecida en forma finita la temperatura

raturas; eso que es notorio que la burbuja recalentada se enfría más rápidamente con la altura que el aire de alrededor.

b) *Ecuaciones de movimiento.*—La aceleración (fuerza resultante por unidad de masa) con que asciende una burbuja pesada de estado (p, v) en el seno de un fluido pesado (p, v_a) se calcula derivando el área A B C D (fig. 13) con respecto a z .

$$\ddot{z} = \frac{dAr}{dz} = \frac{dAr}{dH} \cdot g = g \frac{v - v_a}{v_a}. \quad (48)$$

Si la burbuja es de aire (p, T) sumergido en el aire (p, T_a) , el diagrama $\ln p, T$, nos da

$$\ddot{z} = g \frac{T - T_a}{T_a}. \quad (48)^I$$

Para pequeñas elongaciones, tomando origen el punto de equilibrio

$$\ddot{z} = -g \frac{\gamma - \alpha}{T_e} z = -g \eta_e z \quad (49)$$

siendo $\eta = \frac{\gamma - \alpha}{T}$ el índice de estabilidad de Hesselberg $(m)^*$. La ecuación finita del movimiento *para el caso de equilibrio estable* ($\alpha < \gamma$) es

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{g \eta_e}} \operatorname{sen} t \cdot \sqrt{g \eta_e} + z_0 \cos t \cdot \sqrt{g \eta_e} \quad (50)$$

que representa una oscilación armónica de período $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{g \eta_e}}$.

Para equilibrio inestable ($\alpha > \gamma$) la integral:

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{-g \eta_e}} \operatorname{senh} t \cdot \sqrt{-g \eta_e} + z_0 \cosh t \cdot \sqrt{-g \eta_e} \quad (50)^I$$

sólo representa bien el movimiento en las proximidades del origen; pero las elongaciones crecen indefinidamente, y para valores grandes de ellas la aceleración deja de ser proporcional a z . Entonces, en la imposibilidad de representar con exactitud el movimiento a lo largo de toda la vertical, convendrá tener ecuaciones aproximadas para intervalos alejados del punto de equilibrio.

Escojamos, por ejemplo, como origen el punto en que la temperatura T_o de la burbuja es superior, en un valor finito, a la T_{ao} del ambiente. La aceleración a la altura z la desarrollamos aproximadamente en:

$$\ddot{z} = \ddot{z}_0 + \left(\frac{d\ddot{z}}{dz} \right)_0 z = A + Bz \quad (51)$$

en que $A = g \frac{T_o - T_{ao}}{T_{ao}}$. Para el cálculo de $B = g \cdot \left(\frac{d\frac{T}{T_{ao}}}{dz} \right)_0$, se presta bien el diagrama (fig. 22) (10), pues en él vemos que

$$\frac{dl}{dz} \frac{T}{T_a} = \frac{\alpha - \gamma}{T_a} \text{ luego } \frac{d\frac{T}{T_a}}{dz} = \frac{T}{T_a^2} (\alpha - \gamma); B = g \frac{T_o}{T_{ao}^2} (\alpha - \gamma)$$

La ecuación toma, pues, la forma $\ddot{f} = Bf$, siendo $f = z + \frac{A}{B}$, y su integral es

$$z + \frac{A}{B} = \frac{z_0}{\sqrt{B}} \operatorname{senht} \sqrt{B} + \left(z_0 + \frac{A}{B} \right) \cosh t \sqrt{B} \quad (50)^{II}$$

Para las condiciones iniciales $\dot{z}_0 = z_0 = 0$, se reduce a

$$z = \frac{A}{B} [\operatorname{cosht} \sqrt{B} - 1] \quad (50)^{III}$$

fórmula idéntica, pero más cómoda para el cálculo que la

$$z = \frac{A}{2B} \cdot \frac{(e^{t\sqrt{B}} - 1)^2}{e^{t\sqrt{B}}} \quad (50)^{IV}$$

obtenida por Exner por otro camino (n). Sin duda la diversidad de forma entre las ecuaciones (50)^{IV} y (50)^{III} es el motivo por el cual, aún los tratados (o) que estudian el caso del movimiento vertical periódico, omiten la deducción de la fórmula de Exner, como si el problema analítico fuese distinto y no se tratase de las soluciones trigonométrica e hiperbólica de la misma ecuación diferencial.

Pero, además, para alcanzar la aproximación obtenida por Exner en el problema estudiado por él (burbuja abandonada sin velocidad a 10 metros del punto de equilibrio) basta la fórmula

$$z = z_0 [\cosh t \sqrt{-g \eta_e} - 1] \quad (50)^V$$

pues para $T_e = 300$, $\alpha = 1.5^\circ/100$ m.

(10) Linke pretende establecer la fórmula (51) poniendo $\frac{T}{T_a} = \frac{T_o - \gamma z}{T_{ao} - \alpha z} = \frac{T_o}{T_{ao}} \left[1 + \frac{\alpha - \gamma}{T_{ao}} z \right]$, pero ni ese desarrollo es admisible, ni $(T_o - \gamma z) : (T_{ao} - \alpha z)$ representa la razón $\frac{T}{T_a}$, cuyo verdadero valor dentro de la aproximación de (51) es $(T_a - \frac{T_o}{T_{ao}} \gamma z) : (T_{ao} - \alpha z)$. Por eso y por incorrecciones cometidas por Linke al integrar dicha ecuación no consideramos logrado el intento de dicho autor de estudiar metódicamente el movimiento de masas aisladas en la atmósfera (t).*

$$\frac{A}{B} [\cosh t \cdot \sqrt{B-1}] = 10 \left(1 - \frac{1}{6000}\right) \cdot \left[\cosh t \cdot \left(1 + \frac{1}{3000}\right) \sqrt{-g \eta_e - 1}\right]$$

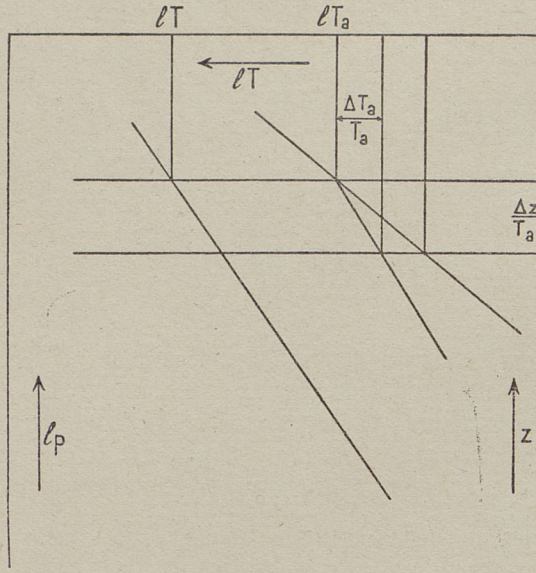


Fig. 22.

y ambas fórmulas no llegan a discrepar en 0,1 m., hasta que t no es del orden de los 4 minutos; pero más allá ambas fallan, porque ya no es lícito despreciar el rozamiento.

He aquí los recorridos verticales en el primer medio minuto, calculados por la fórmula (50)^{III}, para el caso extremo

$$\alpha = 1,5^\circ/100 \text{ m.}, T_0 = 300^\circ, T_a = 290^\circ.$$

$t =$	1 seg.	5	10	20	30
$z =$	0,17 m.	4,23	16,9	68,1	54,1

Como en las condiciones supuestas la distancia inicial al punto de equilibrio es ya de unos 2.067 m., no tendría sentido aplicar aquí la fórmula (50)^V. En cambio, para la elongación inicial de 10 m., supuesta por Exner en el caso que estudia, basta la fórmula (50)^V, como demuestran los siguientes resultados numéricos, para $\alpha = 1,5^\circ/100 \text{ m.}, T_e = 300^\circ$.

$t =$	= 1 seg.	10	50	100	200	240
$z(50)^V$	= 0,83 mm.	81,9 mm.	2,11 m.	9,35 m.	54,9 m.	97,8 m.
$z(50)^{III}$	= 0,83	81,9	2,11	9,35	54,9	97,9
$z(E)$	= 0,83	83,7	2,153	9,541	65,42	

La discrepancia de las cifras $z(E)$, que son las dadas por Exner (n^*) y las muestras es debida en parte al uso de constantes distintas, y en parte a errores numéricos que se explican bien por el uso de la inadecuada fórmula (50)^{IV}. También para el caso $\alpha = 1,1^\circ/100$ m. da Exner cifras inexactas como demuestra el siguiente cuadro:

t	=	1 seg.	10	50	100	200
$z(50)^V$	=	$z(50)^{III} = 0,2$ mm.	16,4 mm.	411,5 mm.	1,68 m.	7,28
$z(E)$	=	0,18	16,4	418	1,71	14,23

Aplicación 3.^a Contracción de una columna por compresión adiabática.—Sabido es que si δz es el espesor de un elemento de columna y $\delta z'$ el que toma después de comprimido

$$\frac{\delta z'}{\delta z} = \left(\frac{p}{p + \delta p} \right)^{\frac{c_v}{c_p}} = \left(1 + \frac{\delta p}{p} \right)^{-\frac{c_v}{c_p}} \simeq 1 - \frac{c_v}{c_p} \cdot \frac{\delta p}{p}$$

y como $\delta p = \delta p_0$ puesto que la compresión individual es la misma para todos los elementos de columna,

$$z' = z - \frac{c_v}{c_p} \delta p_0 \int_0^z \frac{dz}{p} \quad (52)$$

La integral $\int_0^z \frac{dz}{p}$ suele ser determinada por los autores por procedimientos mecánicos (p^*).

Mas cuando se trata de una columna politrópica sabemos que

$$\frac{dz}{p} = - \frac{dT}{\alpha p} = - \frac{v dT}{R \alpha}$$

Por otra parte, recordando que en la recta que la representa

$$\frac{dT}{R \alpha} = \frac{dp}{g} = \frac{dv}{R \alpha - g}$$

resulta

$$\frac{dz}{p} = \frac{dv}{g - R \alpha} \quad (53)$$

de donde

$$\int_0^z \frac{dz}{p} = \frac{v_z - v_0}{g - R \alpha}; \quad z' = z - \frac{c_v}{c_p} \delta p_0 \frac{v_z - v_0}{g - R \alpha}.$$

Aplicación 4.^a Integral másica de la temperatura en una columna politrópica unidad.—Sabido es que para el cálculo de las energías potenciales de una columna es de fundamental importancia la integral

$$I = \int_0^m T dm = - \int_p^p T \cdot \frac{dp}{g}.$$

Pues bien, si la columna es politrópica, por el mismo método del ejemplo anterior reducimos $T \cdot dm$ a la siguiente forma:

$$dI = -T \frac{dp}{g} = -Tp \frac{dp}{g}; \quad \frac{dp}{g} = \frac{dT}{R\alpha} = \frac{d(pT)}{g + R\alpha}$$

$$dI = - \frac{d(pT)}{g + R\alpha} \quad (54)$$

De donde $I = \frac{p_0 T_0 - pT}{g + R\alpha}$, con sencillez que contrasta con el cálculo

clásico de Margules (g).

A esta integral reducimos nosotros no sólo la energía K de Margules, sino también la $P = \int_0^m g z dm$ (energía potencial de la columna unidad) calculada recientemente por Littwin para las columnas politrópicas. En efecto:

$$dP = g \frac{T_0 - T}{\alpha} dm = - \frac{T_0 dp - g dI}{\alpha}$$

de donde

$$P = \frac{T_0}{\alpha} (p_0 - p) + \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{Tp - T_0 p_0}{R\alpha + g} \quad (55)$$

resultado evidentemente idéntico al

$$P = \frac{T_0}{\alpha} (p_0 - p) - \frac{T_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{R\alpha}{g} + 1} \left[p_0 - p \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\alpha}{g}} \right]$$

obtenido por Littwin (γ).

Aplicación 5.^a Transmisión isoterma de los cambios de presión.—Para dos columnas tales que sus representaciones AB y A'B' sean superponibles por la traslación AA', es decir, tales que

$$\frac{p_A}{p_{A'}} = \frac{p_B}{p_{B'}} \quad \text{o bien} \quad \frac{p_{A'} - p_A}{p_{B'} - p_B} = \frac{p_A}{p_B} \quad (56)$$

nuestra construcción (fig. 18) da la misma curva (T, z); luego si sus bases AA' inferiores están al mismo nivel, también lo estarán las superiores B y B' , y en general todas las superficies isothermas. Por tanto, ambas columnas tienen igual temperatura media. Si sin variar las presiones extremas p_A y $p_{B'}$ de la segunda, la sustituimos por otra de la misma temperatura media, tampoco variará el espesor (recuérdese la definición de T_m). Luego siempre que en un cierto espesor de la atmósfera varían las presiones sin alterarse la temperatura media, la variación de p en la cara superior del estrato afectado se transmite a su base mul-

tiplicada por la relación $\frac{p_A}{p_B}$, que se

llama, por este motivo, factor de transmisión isoterma de los cambios locales de presión.

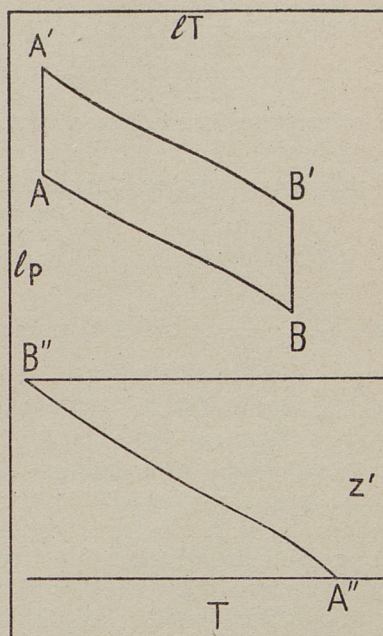


Fig. 23.

E) Determinación de los índices de humedad.

— Admitido hoy unánimemente que el vapor de agua es el más importante factor de la inestabilidad atmosférica, puede decirse que en el día los cálculos aerológicos vienen a ser, en su mayor parte, determinaciones de índices de humedad. Prueba de que dentro de los métodos clásicos los diagramas meteorológicos no se prestan a estas operaciones es que, por ejemplo, en el Servicio alemán se ha introducido para efectuarlas una regla especial de cálculo (regla termodinámica de Robitzsch), la cual, aunque nada cómoda ni muy exacta, sigue en uso a falta de método mejor. He aquí el procedimiento de cálculo gráfico que proponemos para suplirla.

1.º *Humedad específica.*—El método clásico de multiplicar la riqueza higrométrica saturante x_m leída en el diagrama, por la humedad relativa h tiene el pequeño inconveniente de resultar algo inexacto y el gran defecto de exigir dos operaciones un tanto laboriosas cuando hay que efectuarlas para todos los puntos notables del sondeo: la lectura de x_m , nada fácil en la escala irregular y confusa de líneas equisaturadas, y la multiplicación. Por eso ha propuesto Refsdal un método puramente gráfico, que se funda en dos principios que él considera sólo aproximados, pero cuya absoluta exactitud vamos a demostrar:

a) La humedad relativa h de una masa de aire húmedo que evoluciona isotérmicamente se conserva proporcional a la presión. En efecto, $h = \frac{e}{E}$, y como E no varía a T constante, y $e = p \frac{x}{x + \varepsilon}$ se conserva proporcional a p , por no variar la proporción x de mezcla, también es constante $\frac{h}{p}$.

b) La humedad relativa de una masa que evoluciona a lo largo de una línea equisaturada no varía. En efecto, en la masa es $e = p \frac{x}{x + \varepsilon}$, y en la equisaturada $E = p \frac{x_m}{x_m + \varepsilon}$, luego $h = \frac{e}{E} = \text{const.}$

Refsdal (*) prueba el a) poniendo $x \simeq \varepsilon \frac{e}{p}$, y E constante, de donde $\frac{e}{E} \simeq \frac{x}{\varepsilon E} \cdot p$. Y el b) poniendo $h \simeq \frac{x}{x_m}$, en que x se conserva en la mezcla que evoluciona y x_m en la línea equisaturada. Con esto queda convencido de que la conservación no es exacta, aunque afirma que el error es muy pequeño (11).

Para hallar gráficamente x , conocidos p , T y h , traza Refsdal la equisaturada que pasa por P (p , T); por el punto P_1 en que ésta corta a la isobara de 10. h mb, lleva una isoterma y la x_m de su punto P_2 de intersección con la isobara de 1.000 mb es la x de la masa. En efecto, de P a P_1 h no varía; y de P_1 a P_2 el porcentaje h de humedad se mantiene igual a la décima parte del número de mb de presión; luego la masa llega a los 1.000 mb saturada. No es de extrañar que este procedimiento no haya sido adoptado por nadie; exige el trazado de dos líneas (una de las cuales no se puede interpolar, ni con mediana exactitud, en el aerograma) y una lectura en el plexo que forman las equisaturadas con las otras curvas y escalas numéricas, más densas que en ninguna otra parte en la isobara de 1.000 mb.

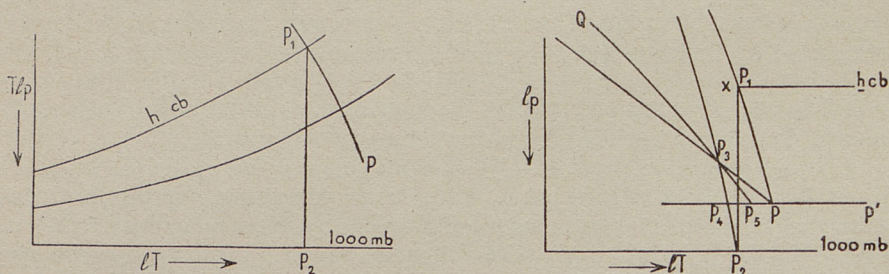


Fig. 24.

(11) Nótese que si no se establece la *exactitud* de los principios de Refsdal no queda demostrado que su método sea válido. No basta, efectivamente, para ello

Nosotros situamos el borde equisaturado de la plantilla sobre P y leemos su x en la intersección de dicho borde con la isobara de h centibares, porque tenemos trasladada a él la escala que las líneas equisaturadas marcan en la isobara de 1.000 mb, lo cual es posible, gracias a que cada punto de dicho borde se mueve sin salir de una isoterma.

2.° *Temperatura equivalente*.—En el mismo punto del borde en que x se lee, puede leerse también la temperatura complementaria en una escala bien fácil de construir, merced a la proporcionalidad de ambas magnitudes. A continuación se marcará el punto P' en la isobara de P y con una temperatura igual a su temperatura equivalente y el punto P₂.

3.° *Nivel de condensación*.—Se traza, con la plantilla, la adiabática seca por P y la equisaturada por P₂. Su intersección P₃ determina evidentemente el nivel de condensación.

4.° *Punto de rocío*.—Es la intersección P₄ de la equisaturada que pasa por P₂ con la isobara de P.

5.° *Línea de evolución*.—Está formada por la adiabática seca PP₂, que va de P al nivel de condensación, y a partir de él por la adiabática saturada P₃Q.

6.° *Temperatura del termómetro húmedo del psicrómetro*.—Dicha adiabática saturada corta a la isobara de P en P₅, a la mencionada temperatura.

7.° *Línea característica de Rossby*.—Es la formada por todos los puntos P₈ en que se cortan la adiabática seca y la saturada, al nivel de condensación.

8.° *Temperaturas potenciales equivalentes*.—La propiamente dicha es la temperatura potencial de P', que se leerá por simple aplicación del borde adiabático (12).

En cuanto a la temperatura pseudopotencial se encontrará marcada en la adiabática saturada de evolución.

Respecto a la diferencia entre ambas temperaturas potenciales equivalentes existen confusiones que conviene desvanecer. La primera es la de aquellos autores que las creían iguales, salvo la pequeña diferencia debida al decrecimiento de L con T . Siendo la temperatura potencial función de la entropía es claro que aumentará tanto más cuanto más aumente ella; luego, aún a igualdad de calor comunicado, la temperatura

que las fórmulas $\alpha = \epsilon \frac{e}{p}$ y $h = \frac{\alpha}{\alpha_m}$ se cumplan con gran aproximación en las condiciones atmosféricas habituales; es menester, además, que también sean suficientemente aproximadas en los estados, por ventura excepcionales, que abarcan las curvas auxiliares de la construcción.

(12) En la práctica se trazan sólo la adiabática seca y la saturada. Los demás puntos se marcan aplicando la plantilla, cuyos bordes suplen las curvas no trazadas. La ventaja de este procedimiento en rapidez y precisión se advierte comparándolo con la regla termodinámica que usan los alemanes, la cual, por el cálculo de las magnitudes fundamentales, exige tres posiciones, sin excusarles para ello de realizar después en un diagrama casi tantas construcciones como precisamos nosotros para resolver por completo de un modo simultáneo la tarea analítica y la gráfica.

potencial ha de quedar mayor cuando la condensación se efectúe a temperaturas más bajas, que es el caso de la pseudopotencial equivalente.

La diferencia entre el calor preciso para pasar de T a la temperatura pseudopotencial T' por camino isobárico, y el calor de condensación es igual al área A (fig. 25). En efecto, por ser adiabáticos el camino $T' T_1$ y todo el camino de descenso, al expresar que dicha área es igual al calor absorbido resulta:

$$A = c_p(T' - T) - \int_{T_1 O} L dx_m \quad (57)$$

Refsdal ha aplicado esta relación; pero la interpreta del modo siguiente: El motivo de que el aire se caliente más, a igualdad de calor, por el camino $T' O T'$ que por el camino isobárico es que para llevar cada unidad de masa por $T' O T'$ hay que realizar un trabajo A contra el gradiente de presión, y *ese trabajo la masa lo transforma en calor* (*). Esta es otra confusión que es preciso rectificar: Una cosa es el trabajo contra el gradiente de presión $\int v dp$ y otra el trabajo de contracción $-\int p dv$ que

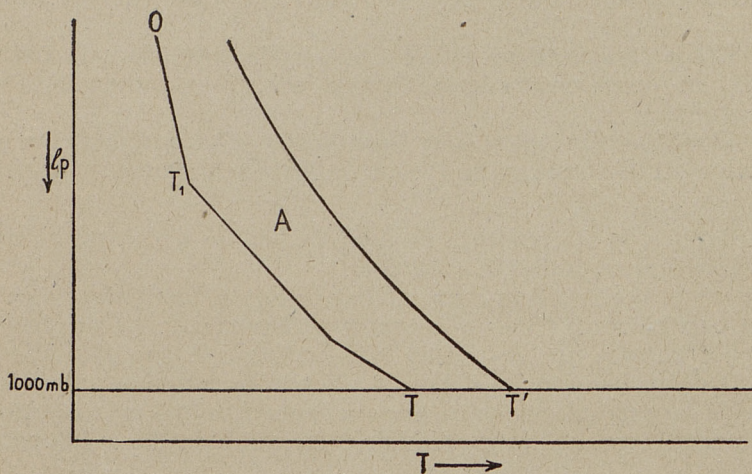


Fig. 25.

puede traducirse en calentamiento. Sólo en un ciclo resultan iguales ambos, por ser diferencial exacta la diferencia $vd p + p dv = d(p \cdot v)$. En nuestro caso es absurdo afirmar que la misma energía que se ha gastado en mover la substancia contra la fuerza del gradiente ha servido *a la vez* para elevar su temperatura. De ese error se hace solidario Koschmieder en la última edición de su tratado. De modo semejante confunden otros autores el trabajo contra el gradiente con el trabajo de contracción. Véase, por ejemplo, Shaw, en su *Manual of Meteorology*, T. III, pág. 270.

F) **Medida de las energías latentes de inestabilidad.**—Hasta aquí no hemos explicado por qué proponemos un diagrama que no conserva las superficies con el p, v . En realidad, nuestro sistema coordinado tiene las escalas del emagrama $\ln p, T$, y con plantillas adecuadas se pueden aplicar a él nuestros métodos—válidos para todos los sistemas $\ln p, f(T)$ —y reservar el sistema politrópico para los estudios de columnas de aire. Pero vamos a probar que no es preciso el empleo de un emagrama para medir las superficies que nos interesan. En efecto, en cuanto a la apreciación de las abscisas medias T_m , ya hemos visto que en este diagrama no es precisa. En cuanto a las áreas que representan las energías latentes de inestabilidad, se medirán hallando la diferencia de geopotenciales entre las isobaras extremas para uno y otro arco de los que cierran el ciclo. Con los demás diagramas no se puede operar así, porque el área

resulta como diferencia pequeña de dos geopotenciales muy grandes, cuyos errores de apreciación desvirtuarían el resultado; así que hay que medir directamente el área con el planímetro. Mas en el diagrama politrópico, dada la gran precisión con que pueden medirse los geopotenciales gracias al empleo de las grandes escalas, la precisión es suficiente, y jamás hacen falta los procedimientos mecánicos de cuadratura. La figura 26 representa la operación de medida del área A. Como el punto P hay que

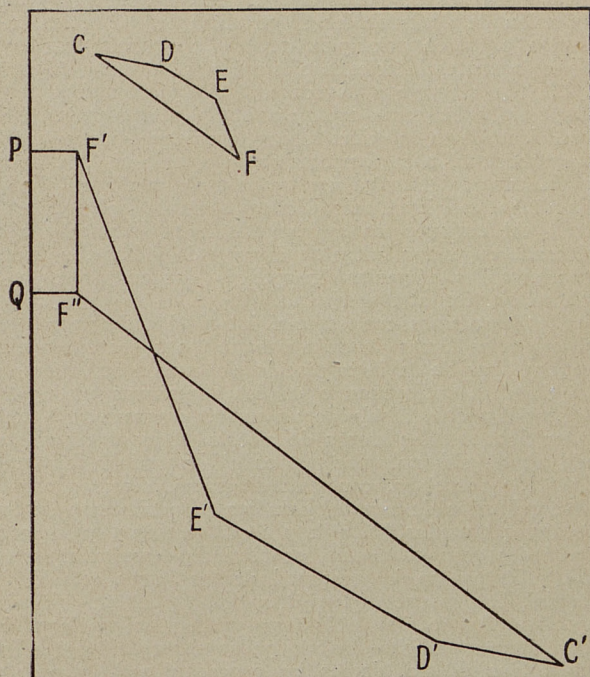


Fig. 26.

determinarlo de todos modos, bastará trazar la adiabática comprendida entre las mismas temperaturas. El segmento resultante PQ se mide en energía mediante una escala especial (13).

Análogamente se opera para contar solenoides.

(13) Como el trabajo de la gravedad en un metro dinámico vale 100.000 ergios por gramo, basta que cada km. din. venga representado por 2 dm. para que cada julio/gramo de energía latente equivalga a 2 cm. de la escala de alturas, con lo cual se consigue suficiente aproximación para todos los problemas prácticos.

RESUMEN

1.º Convencidos de que los diagramas termodinámicos deben ser para el meteorólogo algo más que ábacos, buenos para abreviar rutinariamente ciertas operaciones matemáticas, damos aquí un método sencillo y uniforme para encontrar, por igualación de áreas en los diagramas $p-v$ y $T-S$, las ecuaciones que se derivan de los dos primeros principios de la Termodinámica. Como ejemplo, deducimos las más importantes relaciones clásicas y la fórmula original (8).

2.º Sin recurrir a la ecuación del jacobiano, ni siquiera realizar cuadraturas, establecemos la teoría completa de los emagramas meteorológicos y demostramos la unicidad de la solución. Encontramos que la abcisa del diagrama de Werenskiöld es proporcional a la temperatura potencial; de este hecho, desconocido, al parecer, de Werenskiöld, resulta una manera de medir en el diagrama de Stüve las energías de inestabilidad, más fácil que las de Schnaidt y Montalto.

3.º Al exponer las aplicaciones hidrodinámicas de los emagramas, nos hemos esforzado en evitar faltas de rigor y de método, no poco comunes. Como ejemplo, deducimos las fórmulas energéticas fundamentales y desarrollamos gráficamente toda la estática atmosférica.

4.º Estudiamos con especial interés los diagramas en que son congruentes por traslación las líneas de cada uno de los haces fundamentales, pues esta propiedad, que hace posible la interpolación de curvas auxiliares, por medio de plantillas, la consideramos indispensable en los diagramas meteorológicos.

5.º Damos la teoría de un nuevo diagrama, *el politrópico*, que permite representar fielmente las masas de aire en todo su espesor y medir el geopotencial de cada punto, sin usar planímetros ni determinar temperaturas medias.

6.º Se resuelven, con este diagrama, diversos problemas numéricos y teóricos sobre columnas de aire. Al estudiar el movimiento de burbujas aisladas, se unifican problemas tratados hasta hoy como distintos, y merced al uso de fórmulas más apropiadas para el cálculo, se rectifican resultados numéricos anteriores.

7.º Se prueba la *exactitud* de los lemas establecidos como aproximados por Refsdal, en los que se apoya su método de determinación gráfica de la humedad específica. Aprovechando la congruencia de las líneas fundamentales, se modifican ventajosamente dicho método y las construcciones clásicas de las líneas de evolución. Por último, damos un procedimiento de medida de las energías latentes, de inestabilidad, que hace innecesarias las cuadraturas.

Madrid, 20 de enero de 1943.

BIBLIOGRAFIA

CITAS A QUE SE REFIEREN LAS LLAMADAS (LETRAS ENTRE
PARENTESIS Y CON ASTERISCO) DEL TEXTO

- (a) Shaw: *The phys. processes of Weather*, 1930.
- (b) Morán: *Mem. del Serv. Met. S. A.*, núm. 11, 1939.
- (c) Werenskiöld: *On equal-area transformations, etc.* Geof. Pub. 12, 1938, 6.
- (d) Neuhoﬀ: *Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft*. Abhand. Preuss. Met. Inst. 1900.
Der feuchtlabile Niederschlag. Geof. Pub. 1930, 12. Refsdal.
- (e) Refsdal: *Das Aerogramm*. Met. Zeitschr., 1935.
Stüve: *Aerologische Untersuchungen*. Ergh. Lindenberg, 1922.
- (f) Refsdal: *Aerologische Diagrammpapiere*. Geof. Publ. 1937, 13.
- (g) Sandström: *Energieumwandlungen in der Atmosphäre.—Wirbelbildung in der Atmosphäre*. Ark. für Mat., 7.
Exner: *Dynamische Meteorologie*, 1925, pág. 175.
Koschmieder: *Dyn. Met.*, 1941, pág. 118.
Brunt: *Physical Meteorology*, 1939, pág. 75.
Arakawa: *Tephigramm*, Geophys. Magaz., 1938.
- (h) *Transformaciones termotrópicas*. An. Soc. Fís.-Quím., 1941.
- (i) Hertz: *Graphische Methoden zur Bestimmung der ad. Zustandsänderungen*. Met. Zeitsch., 1884, 421.
- (j) Weickmann: *Aerologische Diagrammpapiere*, 1938.
- (k) Exner: *Ann. Hydr.*, 1926, pág. 20.
Haurwitz: *Met. Zeitschr.*, 1927, 253.
Geophys. Inst. Leipzig, 1927.
Steiner: *Met. Zeitschr.*, 1926, 271.
Rossby: *Beitr. Phys. freier Atm.* T. 13 y T. 14, 1927-28.
Refsdal: *Loc. cit.* (f).
Ertel: *Advektionsmechanismus der atm. Druckschwank.* Zeitschr. Phys., 1935.
Ertel: *Berechnung der Advektion*. Met. Zeitschr., 1935.
- (l) Margules: *Änderung des vert. Gradienten, etc.* Met. Zeitschr., 1906.
- (m) *Stabilitätsverhältnisse in der Atm.* Ann. Hydr., 1918-, 118.
- (n) Exner: *Labilitätsprobleme*. Met. Zeitschr., 1919.
- (o) Stüve: *Dyn. der Atmosphäre*, 1937, págs. 218, 540 y 557.
Ertel: *Method. und Problem. der dyn. Meteorologie*, 1938, pág. 61, 66.
- (p) Koschmieder: *Dyn. Met.*, 1941, pág. 135.
- (q) Margules: *Jahresber. d. Zentralanst. f. Met.*, 1903.
- (r) Littwin: *Met. Forsch. Danzig.*, 1935.
- (s) Weickmann: *Loc. cit.* (j), pág. 76.
- (t) *Vertikalbewegung isolierter Luftmassen*. Met. Zeit., 1928, pág. 255.
- (u) F. Schnaidt: *Energieberechnungen mit dem Stüvenpapier*. Met. Zeits. 59,7, 1942.
M. Montalto: *Rappresentazione dell'energia sui diagrammi di Stüve*. «Riv. de Met. Aeronautica», VI, 3, 1942.

ALFA BÉOLINE

ALFA BÉOLINE

INDICE

	Páginas.
1.—Plan de la Memoria.....	5
2.—Emagramas.—Aplicaciones termodinámicas: <i>A)</i> Fórmulas de Maxwell. <i>B)</i> Relaciones entre calores específicos. <i>C)</i> Cambios de agregación. <i>D)</i> Efectos de la presión exterior en la tensión saturante. <i>E)</i> Efecto Joule Thomson. <i>F)</i> Relaciones entre <i>U</i> y la ecuación de estado.....	5 a 12
3.—Deducción de los emagramas meteorológicos: Tefigrama. Problema general. Diagramas de Neuhoﬀ, Refsdal y Werenskiöld. Unicidad.....	12 a 16
4.—Aplicaciones hidrodinámicas de los emagramas: <i>A)</i> Significado de <i>vd_p</i> . <i>B)</i> Ecuación de las energías mecánicas. <i>C)</i> Ecuación de la energía total. <i>D)</i> Teorema de la circulación..	16 a 17
5.—Columnas flúidas: <i>A)</i> Representación de los geopotenciales. <i>B)</i> Energía de inestabilidad. Cataratas de aire de Sandström. <i>C)</i> Desarrollo gráfico de la estática. <i>D)</i> Enfriamiento del aire por elevación adiabática.....	18 a 20
6.—Elección práctica de un emagrama meteorológico. <i>A)</i> Criterio de elección: congruencia de las líneas fundamentales. <i>B)</i> Congruencia en el tefigrama. <i>C)</i> Congruencia en los diagramas <i>ln_p, f(T)</i> . <i>D)</i> Sistemas coordenados <i>ln_p, $\frac{1}{T}$; ln_p, lnT</i>	20 a 24
7.—El diagrama politrópico y sus aplicaciones: <i>A)</i> Columnas politrópicas. <i>B)</i> El diagrama politrópico. <i>C)</i> Determinación gráfica de geopotenciales. <i>D)</i> Estudio numérico de la evolución de columnas de aire. Aplicaciones teóricas: variación del gradiente térmico por cambio de presión. Ascenso del aire en columnas politrópicas: ecuaciones de evolución y de movimiento. Contracción adiabática de una columna. Integral másica de la temperatura en columnas unidad. Transmisión isotérmica de los cambios de presión. <i>E)</i> Determinación de los índices de humedad. <i>F)</i> Medida de las energías de inestabilidad.....	25 a 43
Resumen.....	44
Bibliografía.....	45

MO
MO
A